Nível 1

Primeiramente analisaremos os casos em que o 9 aparece antes do 6:

_ _ 96 – para o primeiro algarismo tenho 9 possibilidades e para o segundo 10, logo existem 90 números dessa forma.

_9_6 – para o primeiro algarismo tenho 9 possibilidades e para o terceiro 10, logo existem 90 números dessa forma.

_96_ - para o primeiro algarismo tenho 9 possibilidades e para o quarto 10, logo existem 90 números dessa forma.

9_ _6 – para o segundo algarismo tenho 10 possibilidades e para o terceiro 10 também, logo existem 100 números dessa forma.

9_6_ - para o segundo algarismo tenho 10 possibilidades e para o quarto 10 também, logo existem 100 números dessa forma.

96_ _ - para o terceiro algarismo tenho 10 possibilidades e para o quarto 10 também, logo existem 100 números dessa forma.

Assim temos $90 + 90 + 90 + 100 + 100 + 100 = 570\ números$

Esses são os número em que o 9 aparece antes do 6, caso contrário, também vamos ter 570 números.

Assim, basta multiplicar por 2 (devido a possibilidade de permutar os algarismos 6 e 9.

A lista de Geraldo terá $570 \cdot 2 = 1140\ números$

Nível 2

Basta dividirmos a figura verde em dois triângulos, como a área do triângulo é dado em função da altura e da base, e nesse caso permanece inalterado, temos que a área do quadrilátero PMQN é constante, e igual a:

$$2 \cdot \frac{10 \cdot 40}{2} = 400\ cm^2$$

Outra forma de resolver, é perceber que o quadrilátero PMQN corresponde a metade do retângulo ABCD, assim basta calcular a área do retângulo e dividir por 2.

Nível 3

A média de Laura, Paulo e dos netos Artur, Bernardo, Carlos, Danilo, Eduardo e Francisco, pode ser representada por:

$$\frac{L + P + A + B + C + D + E + F}{8} = 26$$

Multiplicando a relação fundamental das proporções: "O produto dos extremos é igual ao produto dos meios"

$$L + P + A + B + C + D + E + F = 208$$

Para a segunda situação, poderíamos representar desta forma:

$$\frac{A + B + C + D + E + F}{6} = 12$$

$$A + B + C + D + E + F = 72$$

Substituindo na nossa primeira equação, temos:

$$L + P + 72 = 208$$

$$L + P = 136$$

Dividindo 136 por 2 obtemos 68. Porém como Paulo é 6 anos mais velhos que Laura, podemos expressar essa soma como:

$$71 + 65 = 136$$

Onde subtrai 3 de 68 e no outro somei 3, aumentando a diferença em 6.

Portanto, Paulo tem 71 anos e Laura tem 65 anos.

Desafio Insano

(15 pontos)

Provar que essa fração é irredutível, é também demonstrar que o numerador e o denominador são primos entre si, ou seja, o mdc entre eles é 1.

Portanto, temos:

$$mdc(21n + 4, 14n + 3) = 1$$

Para demonstrar isso utilizaremos o algoritmo (Lema) de Euclides, onde vale a seguinte afirmação:

$$mdc(a, b) = mdc(a - b, b)$$

Então:

$$mdc(21n + 4, 14n + 3)$$
$$= mdc(21n + 4 - (14n + 3), 14n + 3) =$$

$$mdc(7n+1, 14n+3) = mdc\big(7n+1, 14n+3-(7n+1)\big) =$$

$$mdc(7n+1, 7n+2) = mdc(7n+1, 1)$$

O mdc de dois números onde um deles é 1, é o próprio 1.

Portanto a fração $\frac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível ■