Nível 1

Analisando os casos que podemos ter o algarismo das unidades sendo 6,onde os números são iguais temos:

$$6 \cdot 6 = 36, termina\ em\ 6$$

$$4 \cdot 4 = 16, termina\ em\ 6$$

Logo o número termina em 6, ou termina em 4.

Para o caso de ele terminar em 4 temos que o algarismo das dezenas é 3, pois 3+4=7.

E o produto seria $34 \cdot 34 = 1156$.

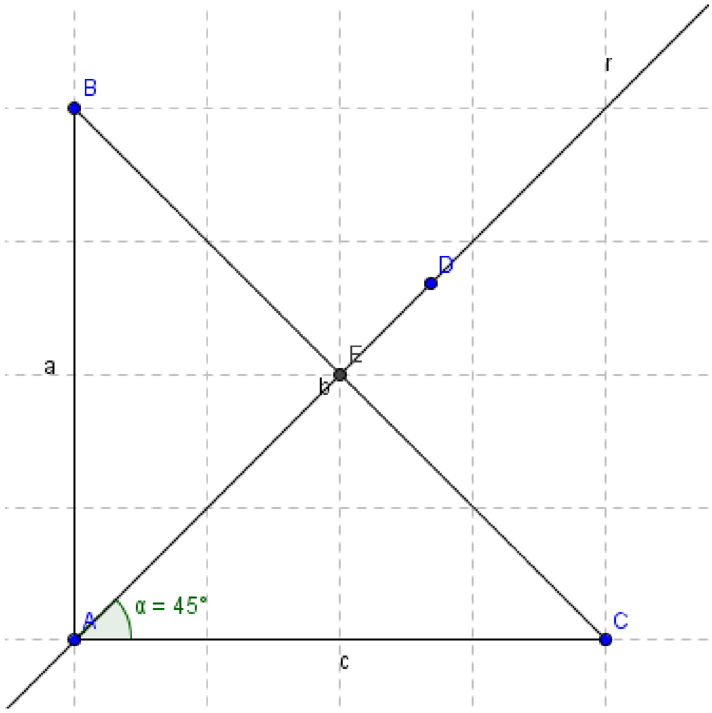
Para o caso de ele terminar em 6, temos que o algarismo das dezenas é 1, pois 1+6=7.

E o produto seria $16 \cdot 16 = 256$.

Logo o produto obtido por João pode ser 256 ou 1156.

Nível 2

Primeiramente, como trata-se de um triângulo isósceles, dois lados iguais, podemos imaginar que se tivéssemos dois desses triângulos colocados de modo que as duas hipotenusas estejam juntas, formaríamos um quadrado, onde a hipotenusa seria a diagonal do quadrado. Como a reta r é também bissetriz do ângulo BAC, que é 90°, podemos também definir como uma diagonal do nosso quadrado. Sabendo que em um quadrado as diagonais são concorrentes e perpendiculares, temos que os ângulos BEA e AEC são congruentes e medem 90°. Também podemos notar que os ângulos EBA e ACE são congruentes pelo fato de que o triângulo ABC é isósceles, onde os ângulos adjacentes à base, que nesse caso é a hipotenusa BC são iguais. Assim como os triângulo ABE e EAC possuem os mesmos ângulos, pelo caso AAA (ângulo-ângulo-ângulo) os triângulos são semelhantes, porém temos também que os lados correspondentes dos triângulos são congruentes, AB e AC pelo fato de o triângulo ser isósceles, BE e EC pois E é o ponto médio de BC, AE comum aos dois, podemos definir que os triângulos são congruentes, e assim terão mesma área.



Nível 3

Arbitrariamente escolhendo o número 756, teríamos após o primeiro passo 756756, dividindo por 7 temos 108108, dividindo por 11 obtemos 9828 e finalmente dividindo por 13, temos 756, ou seja, após as divisões voltamos ao número escolhido no início. Generalizando, qualquer número $(xyz)_{10}$ quando escrevemos novamente ele a direita desse número, obtemos $(xyzxyz)_{10}$ que poderia ser obtido como o produto de $(xyz)_{10} \cdot 1001$. Por outro lado perceba que dividir por 7, por 11 e por 13, é o mesmo que dividir por 1001. Então temos:

$$(xyz)_{10} \cdot \frac{1001}{1001}$$

E assim, observamos que voltaremos ao número escolhido.