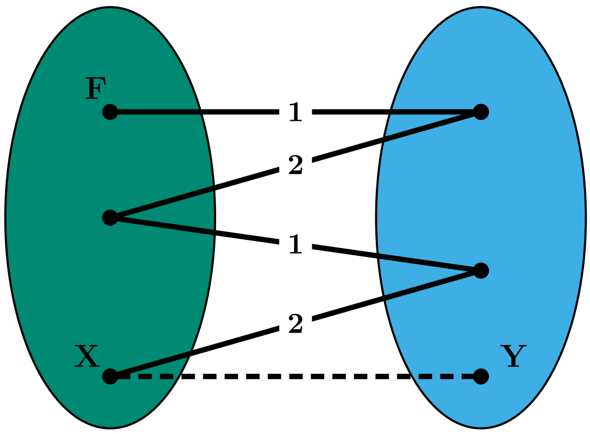
Métodos em Combinatória



brunolholanda@yahoo.com.br

Sumário

Prefácio

Estudar matemática não é fácil. Principalmente quando estamos estudando para as provas das olimpíadas, como a OBM, a Rio-platense, a Olimpíada de Maio e muitas outras que fazem parte da vida dos olímpicos iniciantes. Além disso, a cada ano que se passa as provas ficam mais e mais difíceis para os alunos, e tudo piora se o olímpico não possuir base suficiente para resolver os problemas. Foi pensando nisso que esta apostila foi criada.

Ela é voltada para alunos da oitava série e primeiro ano do ensino médio que tenham uma pequena base em combinatória. Alguns dos problemas são bastante difíceis mas, não desista! Encare-os como desafios e como um treino para as provas futuras. Se mesmo assim você não conseguir resolvê-los procure o professor de olimpíada mais próximo de você. Temos certeza que existe um na esquina de seu bairro. $\ddot\smile$

Ao todo, esta apostila está dividida em sete capítulos e possui um total de 29 exemplos e 139 problemas propostos. Como é um documento ainda inacabado, está possivelmente repleto de erros. Aproveitamos para revelar que quaisquer comentários, sugestões e correções serão sempre bem vindas e que agradecemos desde já a sua ajuda.

Bruno Holanda,
Fortaleza CE
Janeiro 2006.

Notações:

$\mathbb{N}$	Conjunto dos naturais $\{1, 2, 3, ...\}$.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos inteiros.
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto dos inteiros não-negativos.
$\mathbb{R}_+^*$	Conjunto dos reais positivos.
$\mathbb{Q}_-$	Conjunto dos racionais não-positivos.
$a \equiv b \pmod{n}$	a congruente a b módulo n, ou seja $n \mid (a-b)$.
$d(v)$	A quantidade de vértices ligados à v de um grafo.

Capítulo 1

Princípio Multiplicativo

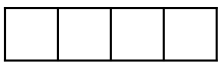
A contagem é talvez a parte mais "aplicável" da matemática. Ela está em todo lugar, da quantidade de maneiras de você se vestir até nos cálculos mais complicas feitos pelas seguradoras. Mas não se preocupe, neste primeiro capítulo vamos mostrar apenas os métodos mais básicos de contagem.

1.1 Contagem Simples e Permutações

Vamos supor que para fazer uma viagem Fortaleza-Recife, devemos escolher uma de cinco estradas possíveis. De quantos modos posso fazer essa viagem? Claramente a resposta é: de cinco maneiras. Mas, agora suponha que depois de passar por Recife eu deseje ir para Salvador. Sabendo que de Recife até Salvador existem três estradas, determine de quantos modos posso ir de Fortaleza a Salvador, passando por Recife.

Solução. Note que, escolhida a estrada Fortaleza-Recife, existem ainda três maneiras de completar a viagem. E como existem cinco maneiras de escolher a primeira estrada, temos: $5 \times 3 = 15$ maneiras no total.

Ex: *De quantos modos podemos pintar um tabuleiro* 1×4 *usando apenas três cores, sem pintar casas vizinhas da mesma cor?*



Solução. Podemos pintar a primeira casa de três maneiras diferentes, a segunda de duas maneiras (não podemos usar a cor da primeira casa), a terceira casa pode ser pintada de duas maneiras (não podemos usar a cor da segunda casa), o mesmo ocorre com a quarta casa. Assim, o total de maneiras de pintar o tabuleiro é $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$. $\square$

No exemplo anterior fica claro que as escolhas nem sempre são totalmente independentes umas das outras, como no primeiro exemplo. Você deve ter bastante cuidado neste tipo de problema e treinar bastante para saber quando os eventos estão dependentes uns dos outros.

Vamos supor que Carlos, Felipe, Marina e Ana estejam em uma fila. Se trocarmos a posição de alguns deles dizemos que fizemos uma *permutação*. A pergunta é: Quantas permutações podemos ter usando quatro pessoas? Antes de resolver o problema vamos aprender uma nova definição:

Dado um número natural n, seja $n!$ (leia n fatorial) o produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$

Para fixar essa notação, vamos resolver alguns problemas simples:

1. Calcule $4!$,$5!$ e $6!$
2. Simplifique as expressões: a)$10! \cdot 11$ b)$n! \cdot (n+1)$
3. Calcule a)$\dfrac{100!}{98!}$ b)$\dfrac{47!}{44!3!}$

Agora que já sabemos um pouco sobre fatoriais, vamos resolver nosso problema!

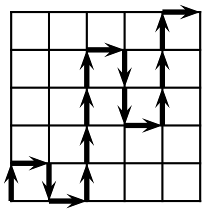
Ex: *De quantas maneiras podemos formar uma fila com Carlos, Felipe, Marina e Ana?*

Solução. podemos escolher o primeiro da fila de quatro maneiras, a segunda de três, a terceira de duas e a última de apenas uma maneira (a pessoa que sobrar). Desse modo temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ permutações. □

Problemas da seção 1.1

1. Numa sala existem 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal?
2. Teddy possui 5 blusas, 3 calções e 2 sapatos. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?
3. Cada casa de um tabuleiro 2×2 pode ser pintado de verde ou amarelo. De quantas maneiras podemos pintar o tabuleiro todo?
4. *(OBM 1998)* O alfabeto do planeta X tem somente duas letras: X e x. O sobrenome de cada um de seus habitantes é uma seqüência formada por 4 letras. Por exemplo, $xXxx$ é um possível sobrenome utilizado nesse planeta. Qual é o maior número de sobrenomes diferentes que podem ser dados no planeta X?
5. *(OBM 2004)* De quantos modos diferentes podemos pintar (usando apenas uma cor) as casas de um tabuleiro 4×4 de modo que cada linha e cada coluna possua exatamente uma casa pintada?
6. Quantos subconjuntos possui o conjunto $\{1, 2, 3, ..., 10\}$?
7. Quantos números naturais de três algarismos distintos existem?
8. De quantos modos podemos por três torres de três cores diferentes em um tabuleiro 8×8 de modo que nenhuma delas ataque outra?

9. De quantas maneiras podemos ir de A até B sobre a seguinte grade sem passar duas vezes pelo mesmo local e sem mover-se para esquerda? A figura abaixo mostra um caminho possível.



10. *(OBM 2005)* Num tabuleiro quadrado, serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo. De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?

11. Dizemos que a palavra *algoritmo* é um anagrama da palavra *logaritmo* pois é uma permutação da letras de logaritmo. Sabendo disso, calcule a quantidade de anagramas da palavra *vetor*.

12. Quantos anagramas da palavra *vetor* termina em uma vogal?

13. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de biologia, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

14. Quantos anagramas da palavra *vetor* possuem as vogais separadas?

15. Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e um apenas do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.
    Obs: A ordem dos homens deve ser considerada.

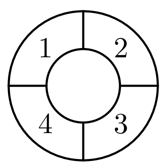
1.2 Separando em Casos

Outra técnica bastante usada em problemas de contagem é a idéia de separar o problema em casos disjuntos. Fazemos isso para evitar contar várias vezes a mesma configuração, ou esquecer algumas delas.

Ex: *O alfabeto da Tanzunlândia é formado por apenas três letras: A, B e C. Uma palavra na Tanzunlândia é uma seqüência com no máximo 4 letras. Quantas palavras existem neste país?*

Solução. Existem 3 palavras com uma letra, 3^2 com duas letras, 3^3 com três letras, e 3^4 com quatro letras. Logo, o total de palavras é $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$. □

Ex: *De quantos modos podemos pintar (usando uma de quatro cores) as casas da figura ao lado de modo que as casas vizinhas tenham cores diferentes?*



Solução. Vamos separar o problema em dois casos:

i. Se as casas 1 e 3 tiverem a mesma cor, temos quatro maneiras de escolher essa cor. Podemos escolher a cor da casa 2 de três maneiras (basta não ser a cor usadas nas casas 1 e 3), o mesmo vale para casa 4. Logo, temos $4 \times 3 \times 3 = 36$ maneiras de pintar dessa forma.

ii. Agora se 1 e 3 têm cores diferentes, podemos escolher a cor da casa 1 de quatro maneiras, da casa 3 de três maneiras e, das casas 2 e 4, podemos escolher de duas maneiras cada. Assim, temos $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ maneiras de pintar desta outra forma.

Desse modo, podemos concluir que existem $36 + 48 = 84$ maneiras de pintar a rosquinha. $\square$

Problemas da seção 1.2

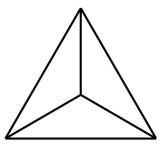
16. Escrevem-se todos os inteiros de 1 a 9999. Quantos números têm pelo menos um zero?

17. De quantas maneiras podemos colocar um rei preto e um rei branco em um tabuleiro de xadrez (8×8) sem que nenhum deles ataque o outro?

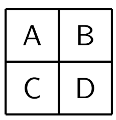
18. Quantos são os naturais pares que se escrevem com três algarismos distintos?

19. *(AHSME 1998)* Um número de telefone $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ é dito "memorável" se a seqüência $d_1d_2d_3$ é igual a uma das seqüências $d_4d_5d_6$ ou $d_5d_6d_7$ (possivelmente ambas). Ache o número de telefones memoráveis.

20. *(Maio 1998)* Cada um dos seis segmentos da figura abaixo deve ser pintado de uma de quatro cores de modo que segmentos vizinhos não tenham a mesma cor. De quantas maneiras podemos fazer isso?



21. *(OBM)* Num tabuleiro mostrado a seguir, escrevemos números inteiros de 1 a 9 obedecendo a seguinte regra: $A > B$, $C > D$, $A > C$ e $B > D$



a) Quantos tabuleiros diferentes existem tais que $B = C$?
b) Quantos tabuleiros diferentes existem no total?

22. Um prova de matemática é composta de 7 problemas. Em cada problemas pode-se obter 0, 1, 2, 3 ou 4 pontos. De quantas maneiras diferentes podemos ter uma pontuação total igual a 24?

23. *(Banco Cone Sul)* Um número de três dígitos é dito *equilibrado*, se um dos seu dígitos é a media aritmética dos outros dois. Quantos são os números equilibrados?

24. Tenho 10 livros distintos de matemática, 3 dos quais são vermelhos. De quantos modos posso ordená-los em uma prateleira de modo que não existam dois livros vermelhos juntos?

1.3 Contagens Múltiplas

Na sala do professor Eis Perto existem dez alunos. Certo dia, o professor resolveu escolher três deles para resolver um problema muito difícil. A pergunta é: De quantas maneiras ele pode fazer isto? Joãozinho, o aluno mais dedicado da sala respondeu da seguite forma:

— Temos 10 maneiras de escolher o primeiro, 9 de escolher o segundo e 8 para o terceiro. Logo, temos $10 \times 9 \times 8 = 720$ maneiras de escolher um trio.

Será que o Joãozinho acertou a pergunta? Bem, pense um pouco no assunto que a resposta será mostrada após resolvermos o seguinte problema:

Ex: *Quantos anagramas possui a palavra CAVALO?*

Solução. Veja que essa palavra possui duas letras A, e que as outras letras são diferentes. Vamos, temporariamente, transformar as duas letras A em duas distintas A_1 e A_2. Desse modo, nós temos $6! = 720$ anagramas. Note que, se trocarmos as letras A_1 e A_2 de posição, teremos formado a mesma palavra. Ou seja, cada palavra foi contada duas vezes. Assim, a resposta correta é $\dfrac{720}{2} = 360$ anagramas. □

Depois de ter visto a solução deste problema, fica claro que Joãozinho errou. Ele contou cada trio $3! = 6$ vezes. Desse modo a resposta correta seria $720/6 = 120$.

Problemas da seção 1.3

26. Quantas diagonais possui um dodecágono regular?

27. De quantas maneiras podemos por três torres de mesma cor em um tabuleiro 8×8 de modo que nenhuma delas ataque a outra?

28. Quantas triplas distintas podemos formar a partir de um grupo de sete pessoas?

29. Quantos anagramas possui a palavra *matematica* (desconsidere o acento)?

30. De quantas maneiras podemos pintar as faces de cubo usando dez cores de modo que cada face fique com uma cor diferente.

31. *(AIME 1996)* Duas casas de um tabuleiro 7×7 são pintadas de amarelo e as outras são pintadas de verde. Duas pinturas são ditas *equivalentes* se uma é obtida a partir de uma rotação aplicada no plano do tabuleiro. Quantas pinturas inequivalentes existem?

32. Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas maneiras esta primeira rodada pode ser realizada?

33. Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para salvar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

34. *(Rioplatense 1999)* De quantas maneiras podemos pintar as casas de um tabuleiro 2×2 usando sete cores?
 Obs: Duas pinturas são consideradas iguais se uma pode ser obtida aplicando uma rotação na outra.

Capítulo 2

Jogos

Jogos sempre foi um tema que aparece com bastante freqüência nas olimpíadas de matemática, por explorarem o raciocínio lógico e ao mesmo tempo serem divertidos e tornarem a matemática mais atrativa aos iniciantes. Neste capítulo vamos mostrar as duas idéias que mais aparecem nas provas: a *simetria* e o uso das *posições vencedoras.*

2.1 Simetria

Uma das estratégias mais simples é o uso de alguma simetria que pode ocorrer durante o jogo em vantagem de um dos jogadores, forçando sempre uma nova rodada para o jogador “destinado à derrota”. Para entender melhor veja o seguinte exemplo:

Ex: *Pedro e Mônica jogam em um tabuleiro* 1×11. *Cada um, em sua vez, pode pintar um dos quadrados (que não foram pintados anteriormente), ou dois quadrados consecutivos (se ambos estiverem brancos). Quem não puder mais jogar perde. Sabe-se que Pedro será o primeiro a jogar. Quem pode sempre garantir a vitória?*

Solução. Pedro sempre poderá ganhar se seguir a seguinte estratégia:

i. Inicialmente, Pedro deve pintar o quadrado do meio.

					$\times$					

ii. Agora, depois que Mônica fizer sua jogada, Pedro deve jogar sempre simetricamente em relação ao centro do tabuleiro (i.e. sempre deixando o tabuleiro simétrico). Por exemplo, se Mônica jogar nas casas 9 e 10, Pedro deve jogar nas casas 2 e 3.

	$\times$	$\times$			$\times$			✠	✠	

iii. Assim, Mônica nunca poderá ganhar, pois na sua jogada ela "quebra a simetria" e a configuração final do jogo todas as casas estarão pintadas, ou seja, a configuração é simétrica. □

Problemas da seção 2.1

1. Sobre uma mesa existem duas pilhas (uma com 15 e outra com 16 pedras). Em um jogo cada jogador pode, em sua vez, retirar qualquer quantidade de pedras de apenas uma pilha. Quem não puder mais jogar perde. Quem possui a estratégia vencedora?

2. Dois jogadores colocam alternadamente bispos (da mesma cor) em um tabuleiro 8×8, de forma que nenhum bispo ataque outro. Quem não puder mais jogar perde.

3. Dois jogadores colocam alternadamente reis (da mesma cor) em um tabuleiro 9×9, de forma que nenhum rei ataque outro. Quem não puder mais jogar perde.

4. São dados um tabuleiro de xadrez (8×8) e palitinhos do tamanho dos lados das casas do tabuleiro. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada rodada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma das casas do tabuleiro, sendo proibido sobrepor os palitinhos. Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1×1 de palitinhos. Supondo que nenhum dos jogadores cometa erros, qual dos dois tem a estratégia vencedora?

5. São dados vinte pontos ao redor de um círculo. Cada jogador em sua vez pode ligar dois desses pontos se essa novo segmento não cortar os feitos anteriormente. Quem não puder mais traçar nenhum segmento perde.

6. Dois jogadores colocam alternadamente **x**'s e **o**'s em um tabuleiro 9×9. O primeiro escreve **x**'s e o segundo **o**'s. Quando o tabuleiro for completamente preenchido o jogo termina e os pontos são contados. Um ponto é dado ao jogador para cada linha ou coluna em que ele possuir mais casas dos que o adversário. O jogador que possuir mais pontos vence. Quem pode sempre ganhar?

7. Um pino está no centro de um tabuleiro 11×11. Dois jogadores movem alternadamente o pino para qualquer outra casa do tabuleiro, mas a cada movimento (a partir do segundo) deve ser maior que o anterior. O jogador que não puder mais jogar perde. Ache a estratégia vencedora.

8. Um jogo consiste em quebrar um tabuleiro 5×10 ao longo de suas linhas. Ganha o primeiro jogador que obter um quadrado 1×1. Quem tem a estratégia vencedora?

2.2 Posições Vencedoras

Alguns tipos de jogos possuem certas configurações que sempre levam um jogador à vitória. Essas configurações são chamadas de posições vencedoras. O próximo exemplo é um jogo bastante simples em que essa estratégia aparece facilmente.

Ex: *Em uma mesa existe um pilha com 10 pedras. Em cada turno é permitido retirar 1,2,3,4 ou 5 pedras (mas sempre retirando pelo menos uma pedra). Tiago e Maria jogam o jogo alternadamente.*

Se Maria começar jogando, ela pode ter certeza de sua vitória?

Solução. Sim. Note que se Maria retirar 4 pedras sobrará seis pedras na pilha. Como Tiago deve retirar entre uma e cinco pedras, na sua próxima jogada Maria terá sobre a mesa dentre uma a cinco pedras sobre a mesa. E como ela pode retirar qualquer um desses números de pedras, Maria sempre irá garantir a vitória. □

Agora pegue o exemplo anterior e substitua 10 por 50. Sabemos que 6 é uma posição perdedora porém, é impossível ir de 50 a 6 ma primeira rodada. O que fazer, então? Devemos descobrir mais posições perdedoras além do 6. Observe:

- $1, 2, 3, 4$ e 5 são posições vencedoras.
- 6 é uma posição perdedora, pois *qualquer* movimento leva o jogador adversário a um dos números $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que são vencedores.
- os números de 7 a 10 são vencedores, pois a partir deles podemos levar o adversário a ter 6 pedras (que é perdedor)
- 12 é uma posição perdedora, pois *qualquer* movimento leva o jogador adversário a um dos números $\{7, 8, 9, 10, 11\}$ que são vencedores.

Note que todos os números múltiplos de 6 são perdedores e o restante dos naturais, vencedores. □

A maior dificuldade nesse tipo de jogos é descobrir quais são as posições vencedoras. Para evitar esse tipo de problema, tenha sempre em mente as seguintes definições:

(a) Posição vencedora: A partir dela, *podemos escolher um movimento* e repassar uma posição perdedora para o adversário.

(b) Posição perdedora: A partir dela, é impossível escolher um movimento e repassar uma posição perdedora para o adversário. Ou seja, *não importa o movimento escolhido*, o adversário irá receber uma posição vencedora.

E como fazer para descobrir quais são as posições vencedoras e perdedoras? A melhor maneira de se fazer isto é analisando o final do jogo e aplicar as definições acima. Vamos ver como no próximo problema.

Ex: *Em um tabuleiro 8×8, uma torre está na casa $a1$. Dois jogadores movem a torre com objetivo de colocar a torre na casa $h8$. Sabendo que a torre pode mover-se apenas para cima ou para direita (quantas casas o jogador desejar) e que não pode-se passar a vez, determine qual jogador tem a estratégia vencedora.*

Solução. Primeiramente note que todas as casas da última linha e da última coluna (exceto a $h8$) são vencedoras pois, a partir delas *podemos escolher* um movimento que nos leve à vitória. Com, isso a casa $g7$ se torna perdedora pois, a partir dela *qualquer movimento* leva o outro jogador a uma posição vencedora (veja a figura 1).

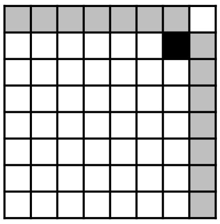


Figura 1

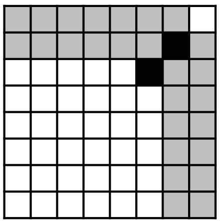


Figura 2

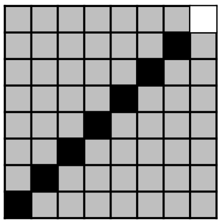


Figura 3

Agora, como $g7$ é perdedora, as demais casas da sétima linha e da sétima coluna são vencedoras. Mais ainda, a casa $f6$ também deve ser perdedora (figura 2). Continuando de maneira análoga, obtemos que a casa $a1$ é perdedora (figura 3). Logo, quem começar, perde.

Problemas da seção 2.2

9. Tom e Jerry jogam um jogo e Tom faz a primeiro passo. Em cada turno o jogador pode diminuir de um dado natural N um dos seus dígitos não-nulos. Inicialmente o número N é 1234. O jogador que obter zero ganha. Quem pode garantir a vitória?

10. Uma pilha de 500 pedras é dada. Dois jogadores jogam o seguinte jogo: Em cada turno, o jogador pode retirar $1, 2, 4, 8, ...$ (qualquer potência de 2) pedras da pilha. O jogador que não puder mais jogar perde.

11. Em uma caixa existem 300 bolinhas. Cada jogador pode retirar não mais do que a metade das bolinhas que estão na caixa. O jogador que não puder mais jogar perde.

12. Sobre uma mesa existem duas pilhas (uma com 7 e outra com 15 pedras). Em um jogo cada jogador pode, em sua vez, retirar qualquer quantidade de pedras de apenas uma pilha ou a mesma quantidade de ambas as pinhas. Quem não puder mais jogar perde. Quem possui a estratégia vencedora?

13. Sobre uma mesa existem duas pilhas (cada uma com 11 pedras). Em um jogo cada jogador deve retirar duas pedras de uma pilha e uma da outra. O jogador que não puder mais jogar perde. Quem possui a estratégia vencedora?

Capítulo 3

Casa dos Pombos

O princípio da casa dos pombos também é conhecido com *Princípio de Dirichlet* pois, foi o matemático Lejeune Dirichlet o primeiro matemático a usa este método para resolver problemas não triviais. Outros matemáticos que se destacaram por usarem essa idéia para resolver diversos problemas foram os húngaros Erdős e Szekeres. Vamos abordar este princípio da seguinte maneira:

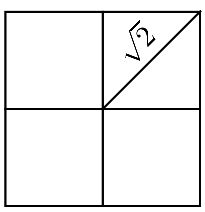
"Se em n caixas são postos $n+1$ pombos, então pelo menos uma caixa terá mais de um pombo."

3.1 Introdução

1. Em um grupo de três pessoas, pelo menos duas delas são do mesmo sexo.
2. Em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas delas têm o mesmo signo.
3. Em um grupo de 5 cartas de baralho, pelo menos duas são do mesmo naipe.
4. Na cidade de Fortaleza, existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

Agora vamos ver como algo tão simples pode resolver problemas aparentemente difíceis:

Ex: *Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado* 2. *Mostre que pelo menos dois deste pontos estão em um distância menor que ou igual a* $\sqrt{2}$.



Solução. Divida o quadrado em quatro quadrados menores como na figura ao lado. Como temos cinco pontos e quatro quadrados, teremos pelo menos dois pontos no mesmo quadradinho. Como a maior distância entre dois pontos do mesmo quadradinho não supera a medida de sua diagonal, o resultado segue de imediato. $\square$

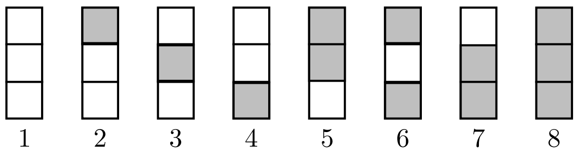
Como acabamos de ver, usar o princípio da casas dos pombos não é difícil. O difícil está em achar o que serão nossos "pombos" e "caixas". O próximo problema é, *a priori*, um problema de teoria dos números. Porém, vamos usar o princípio da casa dos pombos para resolvê-lo.

Ex: *Prove que dados sete inteiros positivos, existem dois cuja soma ou a diferença é um múltiplo de* 10.

Solução. Vamos montar seis caixas $C_0, C_2, ..., C_5$ onde um inteiro está na caixa C_i se é congruente a i ou a $-i$ módulo 10. Sabemos que existirão dois inteiros na mesma caixa. Dessa forma, se eles forem incongruentes módulo 10, basta somá-los. Caso contrário, faça a sua diferença. □

Ex: *Cada casa de um tabuleiro* 3×7 *é pintado de preto ou branco. Mostre que é possível achar um retângulo (com lados paralelos aos do tabuleiro) cujas quatro pontos são da mesma cor.*

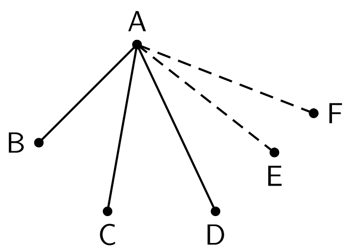
Solução. Cada coluna deste tabuleiro pode ser pintado de uma das seguintes formas:



Observe que se a pintura 1 for escolhida, bastaria uma coluna do tipo 2, 3 ou 4 para formar um retângulo. Com isso, nos restariam apenas mais quatro outras pinturas porém, temos sete colunas. Daí, pelo principio da casa dos pombos teríamos duas colunas iguais. O mesmo ocorre com a coluna do tipo 8.

Agora suponha que nenhuma das colunas for do tipo 1 ou 8. Dessa forma, restaria apenas 6 tipos de pinturas. Assim, pelo princípio da casas dos pombos, duas delas seriam iguais. □

(Teorema de Ramsey). *Em um grupo de seis pessoas sempre existem três que se conhecem mutuamente ou três que não se conhecem mutuamente.*



Prova. Para resolver este problema vamos usar a linguagem dos grafos. Dessa forma, pense em um grafo com seis vértices A, B, C, D, E, F. Uma aresta contínua irá representar uma "amizade" e uma aresta pontilhada, uma "inimizade". Fixado o vértice A, sabemos que ele possui cinco arestas. Como só há dois tipos de aresta, um dos tipos foi usado pelo menos três vezes. Sem perca de generalidade, suponha que o tipo "continua" foi escolhido três vezes.

Agora, se uma das arestas BC,CD ou DB for contínua, teremos três pessoas se conhecendo mutuamente. Caso contrário, as três são pontilhadas. Neste caso, B,C e D não se conhecem mutuamente. □

3.2 Problemas

1. Cinquenta e um pontos são postos no interior de um quadrado de lado 1 metro. Prove que existe um conjunto de três desses pontos podem ser cobertos por um quadrado de lado 20 centímetros.

2. Em cada casa de um tabuleiro 3×3 é colocado um dos números $-1, 0, 1$. Prove que, dentre as oito somas ao longo de uma mesma linha, coluna ou diagonal, existem duas iguais.

3. Prove que de qualquer conjunto de dez inteiros podemos escolher um subconjunto cuja soma é um múltiplo de 10.

4. Prove que existe uma potência de 3 terminada nos dígitos 001 (na base decimal).

5. Mostre que um triângulo eqüilátero não pode ser totalmente coberto por outros dois triângulos eqüiláteros menores.

6. Dados 5 pontos no plano com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos dez pontos médio gerados por eles também possui coordenadas inteiras.

7. O plano é pintado usando duas cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

8. *(Putnam)* O plano é pintado usando três cores. Prove que existem dois pontos de mesma cor distando exatamente um metro.

9. O plano é totalmente pintado usando duas cores. Prove que existe um retângulo cujos vértices são todos da mesma cor.

10. *(Bielorussia 1996)* Em um grupo de 29 hobbits existem alguns deles que falam a verdade e os outros que sempre mentem. Em um certo dia de primavera, todos eles se sentaram ao redor de uma mesa, e cada um deles falou que seus dois vizinhos eram mentirosos.
    a) Prove que pelo menos 10 hobbtis falavam a verdade.
    b) É possível que exatamente 10 deles falem a verdade?

11. Em cada casa de um tabuleiro 10×10 é posto um inteiro de modo que a diferença positiva entre os inteiros de duas casas vizinhas (lado em comum) é no máximo 5. Prove que dois destes inteiros devem ser iguais.

12. Trinta e três torres são postas em um tabuleiro 8×8. Prove que podemos escolher cinco delas sem que nenhuma ataque a outra.

13. Em uma sapataria existem 200 botas de tamanho 41, 200 botas de tamanho 42, e 200 botas de tamanho 43. Dessas 600 botas, 300 são para o pé esquerdo e 300 para o direito. Prove que existem pelo menos 100 pares de botas usáveis.

14. Onze estudantes formaram cinco grupos de estudo. Prove que existem dois alunos A e B, tais que em todo grupo que inclui A também inclui B.

15. *(TT 1994)* Existem 20 alunos em uma escola. Quaisquer dois deles possui um avó em comum. Prove que pelo menos 14 deles possui um avó em comum.

16. *(Rússia 1997)* Uma sala de aula possui 33 alunos. Cada aluno tem uma música e um cantor favorito. Certo dia, cada um deles perguntou aos demais suas músicas e catores favoritos. Em seguida, cada um falou dois números, o primeiro era a quantidades de alunos que gostavam da mesma música e o segundo, a quantidade de alunos que tinham o mesmo cantor favorito. Sabe-se que cada um dos números de 0 a 10 apareceu entre as respostas. Mostre que existem dois alunos que gostam do mesmo cantor e da mesma música.

17. *(IMO 1983)* Cada ponto do perímetro de um triângulo eqüilátero é pintado de uma de duas cores. Mostre que é possível escolher três pontos da mesma cor formando um triângulo retângulo.

18. *(Leningrado)* Considere 70 inteiros positivos distintos menores ou iguais a 200. Prove que existem dois deles cuja diferença é 4, 5 ou 9

19. Prove que de qualquer subconjunto de $n+1$ elementos do conjunto $\{1, 2, ..., 2n\}$ é possível escolher dois que sejam primos entre si.

20. Prove que de qualquer subconjunto de $n+1$ elementos do conjunto $\{1, 2, ..., 2n\}$ é possível escolher dois em que um seja divisível pelo outro.

21. *(USAMO 1985)* Em uma festa há n pessoas. Prove que existem duas pessoas tais que, das $n-2$ pessoas restantes é possível achar $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ onde cada uma delas conhece ou não conhecem ambas.

22. *(IMO 1972)* Prove que, de qualquer conjunto de dez números distintos de dois dígitos, podemos escolher dois subconjuntos A e B (disjuntos) cuja a soma dos elementos é a mesma em ambos.

23. *(Jr. Balkan)* Em um país com seis cidades quaisquer duas são conectadas por uma linha aérea (ida-volta). Cada linha aérea é operada por exatamente uma das duas empresas aéreas existentes. Mostre que existem quatro cidades A, B, C, D tais que as linhas AB, BC, CD, DA são controladas por uma única empresa.

24. *(IMO 1947)* Dezessete pessoas trocam cartas entre si, falando sobre exatamente um de três assuntos. Prove que existe um grupo de três pessoas que falam sobre o mesmo assunto mutuamente.

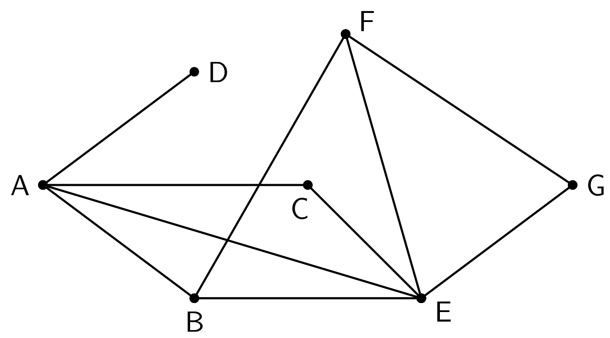
Capítulo 4

Grafos

Os grafos são uma das estruturas mais simples e usadas da combinatória. Suas aplicações são incontáveis, entre elas estão a criptografia, sistemas de redes, otimização de processos e muitos outros. Abstratamente, um *grafo* nada mais é do que um par $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas.

4.1 Introdução

Por exemplo, poderíamos construir um grafo que represente as estradas que ligam algumas cidades.



Vamos aproveitar o grafo acima para abordar algumas definições. Por exemplo, o grafo acima é *conexo*, pois é possível ir de um vértice a qualquer outro passando usando algumas de suas arestas. Por exemplo, para ir de A até G basta fazer a seguinte seqüência $A \to C \to E \to F \to G$. Dizemos então, que esta seqüência é um *caminho* de A até G. Agora, um caminho fechado é chamado de *ciclo*. Por exemplo, o caminho $A \to B \to E \to A$ é um ciclo de tamanho 3 (ou seja um C_3). Já o ciclo $B \to E \to G \to F \to B$ é um C_4.

Outra notação muito importante é o *grau*. Vamos definir o grau de um vértice v como a quantidade de arestas que incidem nele. E vamos denotar essa quantidade como $d(v)$. Por exemplo, $d(A) = 4$, $d(B) = 3$ e $d(C) = 2$. Os próximos exercícios servirão para fixarmos as definições que acabamos de aprender.

Exercícios:

1. Sabemos que o grafo anterior era conexo. Porém, existe uma aresta que, se retirada, o grafo passará a ser *desconexo*. Que aresta é essa? Explique porque não pode ser outra.

2. Qual é o menor caminho de D até C? E o maior? (não se pode repetir arestas)

3. Quantos ciclos de tamanho três existem? E de tamanho quatro?

4. Determine o ciclo que possui o maior tamanho.

5. Qual o vértice que tem o maior grau?

6. Calcule a soma dos graus de todos os vértices do grafo.

O próximo problema é um dos mais famosos problemas de toda a olimpíada de matemática. Pode ter certeza que você ainda vai ouvir falar desse problema muitas vezes.

Ex: *É possível que os cavalos da figura 1 fiquem na posição da figura 2?*

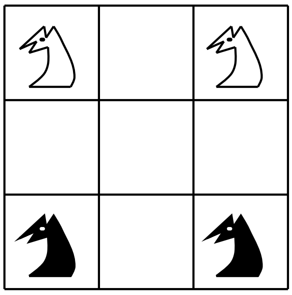


Figura 1

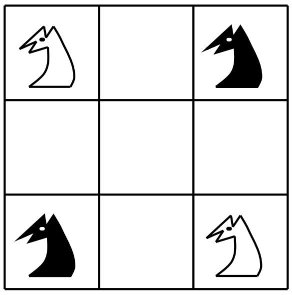
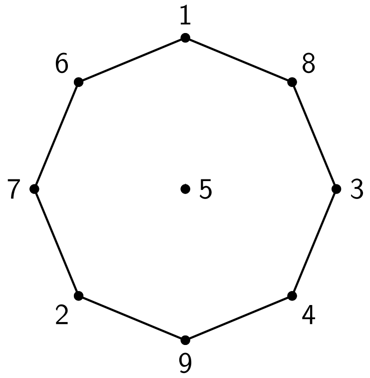


Figura 2

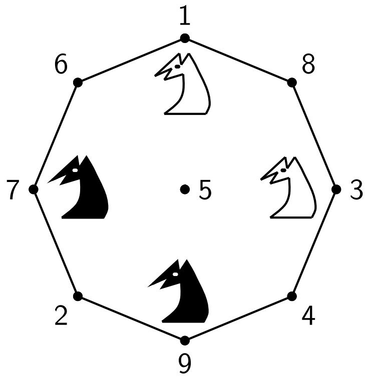
Solução. Vamos enumerar as casas do tabuleiro da seguinte forma:

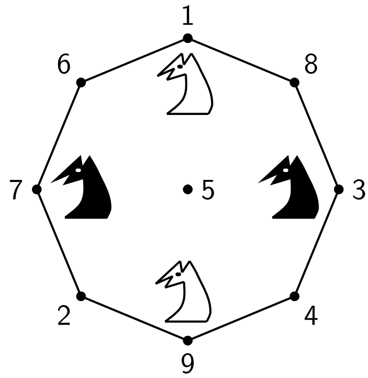
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Agora vamos construir um grafo com vértices $1, 2, ..., 9$ onde vamos ligar dois vértice i e j se é possível o cavalo ir da casa i até a casa j usando apenas um movimento. Dessa forma, obtemos o seguinte grafo:



Agora colocamos os cavalos de acordo com os tabuleiros mostrados anteriormente.





Dessa forma fica fácil ver que é impossível ir de uma configuração a outra, pois a ordem cíclica dos cavalos não pode mudar. □

Teorema. *Em um grafo simples $G = (V, A)$, a soma dos graus de todos os seus vértices é igual ao dobro do número de arestas. Ou seja;*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|A|$$

Prova. De cada vértice v partem $d(v)$ arestas. Porém, cada aresta possui dois vértices. Desse modo, se somarmos os graus de todos os vértices obteremos o dobro do número de arestas. □

Vamos aplicar esse teorema no problema que apareceu na olimpíada dos Estados Unidos de 1989.

Ex: *Um torneio de xadrez reúne 20 jogadores. Foram jogadas 14 partidas, com cada jogador jogando pelo menos uma vez. prove que nesse campeonato deve haver um conjunto de 6 jogos com 12 jogadores diferentes.*

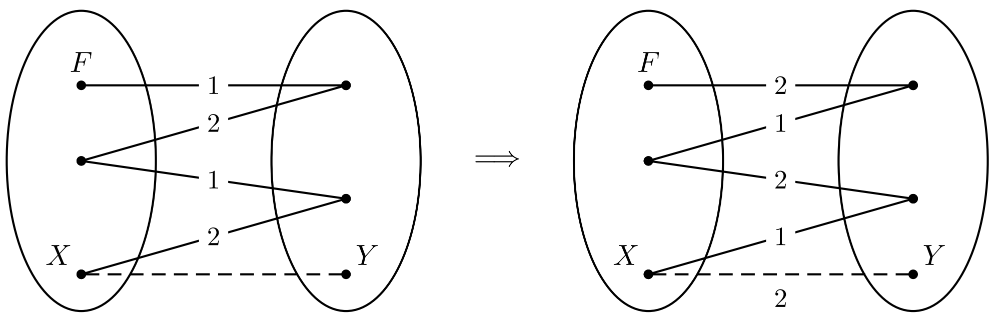
Solução. Vamos montar um grafo G com 20 vértices a 14 arestas, onde os vértices representam os jogadores e as arestas os jogos. Como cada jogador jogou pelo menos uma vez, cada vértice do grafo tem pelo menos grau 1. Agora, usando o teorema temos que a soma dos graus dos vértices é 28. Daí, pelo princípio da casa dos pombos, devem existir pelo menos 12 vértices com grau exatamente 1. Esses 12 vértices representam os 12 jogadores solicitados pelo problema. $\square$

Veja que no exemplo anterior além de usar um teorema sobre grafos usamos também o princípio da casa dos pombos. Usar outras idéias é muito comum em problemas de grafos. Pode aparecer de tudo, de contagem ao método probabilístico. O próximo problema é da olimpíada do Leningrado de 1990. Neste exemplo vamos usar uma idéia um pouco mais sofisticada, o princípio do extremo.

Ex: A Brunzundanga e a Zuzunzilandia são países vizinhos. Sabe-se que cada cidade está ligada a no máximo dez outras cidades e que cidades do mesmo país não são ligadas. Prove que podemos pintar essas estradas usando dez cores de modo que estradas adjacentes possuam cores distintas.
PS: As estradas são adjacentes se possuem uma cidade em comum.

Solução. Suponha que inicialmente todas as estradas estavam incolores. É claro que podemos escolher uma delas e pintar com uma das cores. A partir daí vamos pintar as demais estradas respeitando a seguinte regra:

Sejam X e Y duas cidades (uma de cada país) tais que a estrada XY está incolor. Desse modo, existe uma cor (digamos a cor 1) que não foi usada em nenhuma das estradas partindo de X e uma cor (digamos a cor 2) que não foi usada em nenhuma das estradas partindo de Y. Agora escolha o maior caminho da forma $2-1-2-1-\cdots$ partindo de X.



Suponha, sem perda de generalidade, que esse caminho termine em uma aresta de cor 1 na cidade F. Desse modo, não existe uma estrada de cor 2 partindo de F. Com isso, podemos trocar as cores das estradas deste caminho (onde for 2 pintamos de 1 e virce-versa) sem nenhum problema. Para finalizar, basta pintar a estrada XY da cor 2. $\square$

4.2 Árvores

Outro conceito muito importante em teoria dos grafos é a definição de *árvore*. Calma! Apesar da Natureza ser um assunto muito importante, não vamos falar sobre o meio ambiente. Na verdade, uma árvore nada mais é do que um grafo conexo sem ciclos. (Não tente falar sobre isto com seu professor de biologia!) Por exemplo, os dois próximos grafos são árvores.

Note que nas duas árvores acima existem alguns vértices com grau exatamente 1. Esse vértices são conhecidos como as *folhas* da árvores. Além disso, um conjunto de árvores é chamado de *floresta*. Bem, mais sugestivo que isso não poderia ser, não é?

Podemos citar três fatos sobre as árvores que merecem nossa atenção:

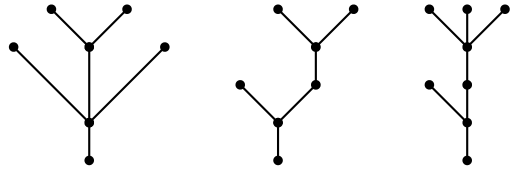
a. Toda árvore possui pelo menos duas folhas.
b. Toda árvore com n vértices possui exatamente $n-1$ arestas.
c. O "menor" grafo conexo é uma árvore.

Você deve estar se perguntando: Como assim menor grafo? Na verdade o fato fica mais claro se for exposto da seguinte maneira: *Se um grafo com n vértices é conexo, ele possui pelo menos $n-1$ arestas.* Agora, para provar que isso gera uma árvore, é outra história.

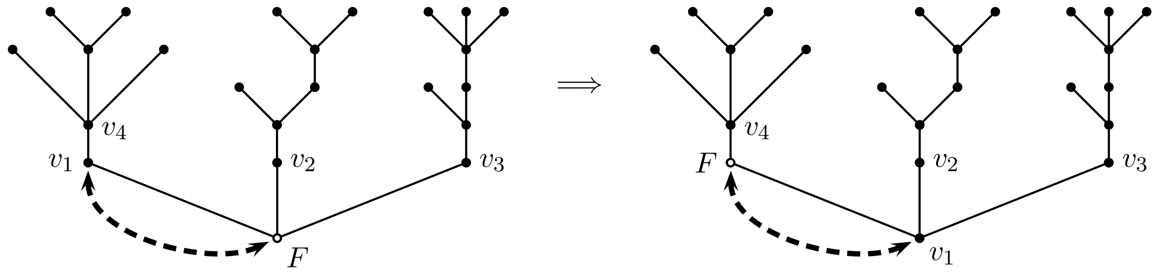
Vamos provar a utilidade das árvores (além de fabricar papel $\smile$) resolvendo o seguinte problema que foi o problema 6 do segundo nível da olimpíada rioplatense de 2003:

Ex: *Sobre uma mesa tem-se $n \geq 2$ bolsas de plástico, todas de cores distintas. Cada uma está em contato com a mesa ou está dentro de outra bolsa. A operação permitida é escolher uma bolsa que está em contato com a mesa, retirar todas as bolsas do seu interior e coloca-las sobre a mesa e colocar todas as outras bolsas que estavam fora e colocar no seu interior (sem modificar o conteúdo das outras bolsas). Determine o total de configurações diferentes que podem ser obtidas utilizando a operação quantas vezes o necessário.*

Solução. Construa um grafo com n vértices, onde cada vértice representa uma bolsa. Vamos ligar dois vértices v_i, v_j se as bolsas b_i, b_j estão imediatamente uma dentro da outra. O grafo será algo semelhante ao grafo abaixo.



Agora construa um novo vértice F e ligue-o a todos os vértices que representam as bolsas que estão sobre a mesa. Note que aplicar a operação, no grafo representa trocar a posição do vértice F pela posição do vértice que foi operado. E como o grafo possui um total de $n+1$ vértices, existem ao todo $n+1$ configurações.



A figura acima mostra a troca das posições dos vértices F e v_1. Os vértices v_1, v_2, v_3 representam as três bolsas que estavam inicialmente sobre a mesa. Note que após aplicar a operação, os vértices que ficam ligados a F são v_1 e v_4, e as bolsas que ficam sobre a mesa são exatamente b_1 e b_4. $\square$

4.3 Problemas

1. Em um grupo de 50 cientistas sabe-se que cada um deles conhece pelo menos 25 outros cientistas. Prove que podemos colocar quatro deles ao redor de uma mesa de forma que cada cientista esteja sentado ao lado de dois amigos.

2. Considere um grupo de 1997 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:
a) 3 pessoas?
b) 4 pessoas?

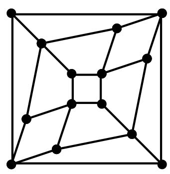
3. Considere um grupo de 1998 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente 101 pessoas do grupo?

4. Cada um dos 102 estudantes é amigo de pelo menos 68 outros alunos. Prove que existem quatro estudantes com o mesmo número de amigos.

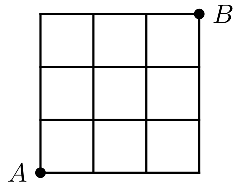
5. Na Bruzundanga, quaisquer duas cidades são ligadas por uma estrada. Um imperador tirano decidiu transformar todas essas estradas em estradas de mão única de tal forma que se uma pessoa sair de sua cidade não poderá mais voltar. É possível fazer tal crueldade?

6. Todos os vértices de um grafo têm grau 3. Prove que o grafo possui um ciclo.

7. A figura abaixo representa as ligações rodoviárias entre 14 cidades. Existe um caminho passando por cada cidade exatamente uma vez?



8. Considere o quadrado 3×3 abaixo. Uma formiga sai do ponto A, caminha sobre as linhas da grade e chega em B. Os únicos pontos por onde a formiga pode passar mais de uma vez são os os vértices dos quadradinhos. Qual é o tamanho máximo do caminho que a formiga pode percorrer?



9. *(Rússia 2003)* Existem N cidades em um país. Entre quaisquer duas cidades existe uma estrada ou uma linha de trem. Um turista deseja viajar pelo país, visitando cada cidade uma única vez, e retornando à cidade inicial. Prove que ele pode escolher uma cidade, e percurso da viagem de tal forma que ele não irá trocar de meio de transporte não mais do que uma vez.

10. Em uma festa havia 25 pessoas. Sabe-se que cada pessoa conhecia, na festa, exatamente k pessoas. Por outro lado, quaisquer dois dos presentes na festa ou se conheciam, ou tinham pelo menos um conhecido em comum. Determine o menor valor possível de k.

11. *(São Petersburgo 2001)* Um país possui 2000 cidades. Mostre que é possível unir pares de cidades usando estradas (duas-mãos) tal que para $n = 1, 2, ..., 1000$, existem exatamente duas cidades com exatamente n estradas.

12. *(Leningrado 1990)* Quaisquer duas das 101 cidade de Farland são conectadas por não mais que uma estrada de mão única. Sabe-se que cada cidade possui 40 estradas "saindo" e 40 estradas "chegando". prove que uma pessoa pode sempre ir de uma cidade a outra passando por não mais do que outras duas cidades.

13. Em um conjunto de n pessoas, em qualquer grupo de quatro delas existe uma que conhece as outras três. Prove que existe uma pessoa que conhece todas as outras.

14. Em um conjunto de $2n$ pessoas existem duas com um número par de amigos em comum.

15. *(Balcânica 1987)* Em um congresso mundial, estão presentes 1985 pessoas. Em cada grupo de três delas, existem duas que falam a mesma língua. Se cada pessoa fala no máximo cinco línguas, mostre que existe um grupo de 200 delas que falam a mesma língua.

16. *(Irã 2003)* Seja G um grafo simples com 100 arestas e 20 vértices. Podemos escolher um par de arestas disjuntas de 4050 maneiras. Prove que o grafo é regular.

17. *(IMO 1991)* Suponha que G é um grafo conexo com k arestas. Prove que podemos enumerar as arestas usando os números $1, 2, ..., k$ de modo que em cada vértice com mais de uma aresta, o m.d.c dos inteiros escritos nas arestas que incidem nele seja 1.

18. *(Leningrado 1988)* Em Bilboland existem N cidades e $2N - 1$ estradas, sempre de mão única, ligando essas cidades; cada estrada lida apenas duas cidades. Em Bilboland podemos ir de uma cidade a qualquer outra. Prove que existe uma estrada que pode ser interditada mas a propriedade acima continua válida.

19. Raul vai dar uma festa com n pessoas (cada uma conhece pelo menos uma outra pessoa). Victor chega e diz:
– Todas as pessoas que conhecem exatamente uma pessoa devem sair da festa.
Quando estas pessoas não estão mais na festa, Victor volta a falar:
– Todas as pessoas que conhecem exatamente duas pessoas devem sair da festa.
O procedimento se repete até n. Encontre o maior número de pessoas que pode restar no final do procedimento.

20. Em um grafo com 100 vértices, em qualquer grupo de quatro vértices existe uma aresta que liga dois deles. além disso, não há um caminho que passe por cada vértice exatamente uma vez. Prove que podemos escolher dois vértices A e B de modo que cada um dos outros vértices está ligado ou a A ou a B.

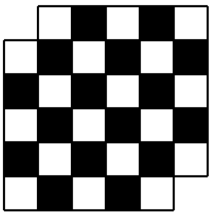
Capítulo 5

Tabuleiros

Neste capítulo vamos trabalhar apenas com tabuleiros. Todas as estratégias para resolver os próximos problemas são na verdade uma invariante (assusto que vamos estudar no próximo capítulo) bastante simples que são as pinturas.

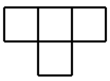
5.1 Introdução

Ex: *Determine se é possível cobrir ou não o tabuleiro abaixo (sem sobreposições) usando apenas dominós?*



Solução. Pinte as casas do tabuleiro acima alternadamente de branco e preto (como no tabuleiro de xadrez). Note que, não importa como colocamos o dominó no tabuleiro, ele sempre cobre uma casa branca e ou outra preta. Desse modo se fosse possível cobrir o tabuleiro usando apenas dominós, deveríamos ter o tabuleiro com a quantidade de casas pretas igual a quantidade de casas brancas. Mas no tabuleiro "quebrado" existem 18 casas brancas e 16 pretas. Logo, não é possível fazer tal cobertura. □

Ex: *Podemos cobrir um tabuleiro* 10×10 *usando apenas T-tetraminós como abaixo?*



Solução. Pinte o tabuleiro de branco e preto da maneira usual (como no xadrez). Note que ao colocarmos um T-tetraminó no tabuleiro ele pode assumir colorações do tipo 1 ou 2.

Suponha que ao cobrir o tabuleiro usamos A peças do tipo 1 e B do tipo 2. Sabemos que devemos usar 25 peças no total ou seja $A+B=25$. Cada peça do tipo 1 possui uma casa branca e cada peça do tipo 2 possui 3 casas brancas, e como temos ao todo 50 casas brancas no tabuleiro; $A+3B=50$. De modo análogo, obtemos $B+3A=50$. Porém o sistema acima não possui solução inteira. Logo, não é possível cobrir o tabuleiro. $\square$

Tipo 1 Tipo 2

Ex: *É possível que um cavalo do xadrez passe por todas as casas de um tabuleiro* 4×10 *exatamente uma vez e, em seguida retorne para o quadrado original?*

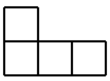
	1	2	1	2	1	2	
	3	4	3	4	3	4	
	4	3	4	3	4	3	
	2	1	2	1	2	1	

Solução. Pinte o tabuleiro $4 \times n$ como mostra a figura acima. Assuma que seja possível fazer que o cavalo passe por todas as casas. Note que, se o cavalo está na casa 1 só poderá ir para casa 3 desse modo para o cavalo ir para uma casa de cor 1 ele passa por duas casas de cor 3, e como cada cor possui o mesmo número de casas, fica impossível o cavalo fazer o passeio. $\square$

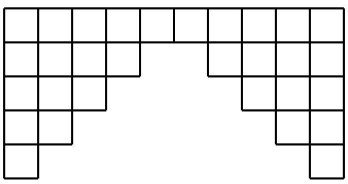
Em geral, nos problemas de tabuleiro devemos seguir a seguinte estratégia:
1. Tentar alguns casos particulares para ver se vai ou não ser possível cobrir o tabuleiro.
2. Se o tabuleiro for muito grande tente analisar casos pequenos (isso é útil em todo tipo de problema)
3. Pintar. A pintura deve refletir as propriedades dos poliminós e do tabuleiro. Não se canse de tentar novas pinturas e não se preocupe em usar apenas duas cores.

5.2 Problemas

1. É possível cobrir um tabuleiro 8×10 usando apenas L-tetraminós como o abaixo?



2. É possível cobrir o tabuleiro abaixo usando apenas dominós?



3. Podemos cobrir uma caixa $10 \times 10 \times 10$ com 250 caixas $1 \times 1 \times 4$?

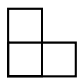
4. Um tabuleiro $n \times m$ foi totalmente coberto usando peças 4×1 e 2×2. Em seguida, todas as peças foram retiradas do tabuleiro e uma peça 2×2 foi substituída por uma peça 4×1. Prove que o tabuleiro não poderá ser mais coberto com essa troca.

5. De um tabuleiro $n \times n$ são retiradas suas quatro casas do quanto. Quais são os valores de n para os quais esse tabuleiro quebrado é coberto por L-tetraminós?

6. Sejam m e n inteiros maiores que 1. Se um tabuleiro $m \times n$ pode ser coberto com L-tetraminós então é mn é múltiplo de 8.

7. Um tabuleiro $a \times b$ pode ser coberto usando apenas peças $1 \times n$ se e somente se $n \mid a$ ou $n \mid b$

8. *(Romênia 2000)* Determine todos os tabuleiros $m \times n$ que podem ser cobertos usando L-triminós como abaixo:

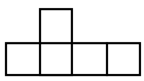


9. Um tabuleiro 7×7 é coberto usando 16 peças 3×1 e um monominó. Determine todas as posições possíveis do monominó.

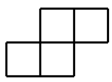
10. Retira-se uma casa de um tabuleiro $2^n \times 2^n$. Mostre que as $2^{2n} - 1$ casas restantes podem ser cobertas por L-triminós.

11. *(Rioplatense 1999)* É possível cobrir um tabuleiro 1999×1999 com quadrados de lados inteiros maiores que 35?
Ps: Os quadrados podem ser de tamanhos distintos.

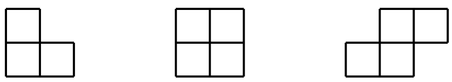
12. É possível cobrir um tabuleiro 5×10 usando apenas peças como abaixo?



13. Qual o número máximo de S-tetraminós como o abaixo podem ser colocados, sem sobreposições em um tabuleiro 10×10?



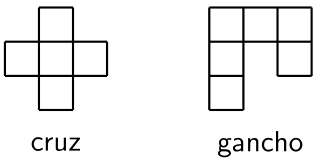
14. Um tabuleiro 7×7 é coberto usando peças do seguinte tipo:



(1) (2) (3)

Prove que uma e apenas uma peça com quatro casas é usada.

15. *(Rússia 1997)* Podemos cobrir um tabuleiro 75×75 usando dominós e cruzes (como na figura a seguir)?



16. Um *gancho* é uma figura de seis casas como na figura acima ou qualquer uma das figuras obtidas desta aplicando rotações ou reflexões. Determine todos os tabuleiros $m \times n$ que podem ser cobertos usando esses ganchos.

Capítulo 6

Invariantes

Neste capítulo vamos estudar o princípio da invariância. Ou seja, vamos resolver problemas que, dada uma transformação, existe uma propriedade associada que nunca muda. Por exemplo, se somarmos dois a um certo natural, sua paridade é invariante.

6.1 Analisando as invariantes

Ex: *Nove casas 1×1 de um tabuleiro 10×10 estão infectadas. A cada segundo, uma casa que possui duas casas vizinhas (com um lado em comum) infectadas também se torna infectada. É possível todas as casas se tornarem infectadas?*

Solução. Note que o perímetro da área infectada nunca aumenta. Inicialmente, temos um perímetro que é no máximo $4 \times 9 = 36$ e o perímetro do tabuleiro todo é $4 \times 10 = 40$. Logo, é impossível que o tabuleiro fique todo infectado.

Dica: Quando você se deparar com um problema que usa algum tipo de transformação, a primeira coisa que você deve ter em mente é usar invariantes.

Ex: *Cada um dos números $a_1, a_2, ..., a_n$ é 1 ou -1, e temos que:*

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$$

Prove que $4 \mid n$.

Esse problema parece muito mais com um problema de teoria dos números do que um problema de invariância. Na realidade, como isso pode ser um problema de invariância se, não temos nenhuma transformação? Não seja por isso! Podemos criar nossas próprias transformações!

Solução. Nosso movimento será o seguinte: "trocar a_i por $-a_i$". Fazendo essa operação, a congruência de S módulo 4 é invariante pois, trocam de sinal exatamente quatro parcelas de S. Assim, basta trocar todos os a_i's que forem -1 por 1. Portanto $0 \equiv S \equiv 1+1+\cdots+1 \equiv n \pmod 4 \Rightarrow 4 \mid n$. $\square$

Outra maneira de se construir invariantes é através de energias. Os alunos que estudam física sabem muito bem que "a energia total de um corpo é *invariante* em um sistema isolado". Pois é, vamos usar esse fato que lembra bastante invariantes em prol da matemática. Vamos construir nossas próprias energias e, em seguida, mostrar que ela é invariante.

Ex: *Em cada um dos dez degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, dando um pulo, ir para outro degrau. Porém, quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã deve pular a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas no mesmo degrau? Justifique.*

Solução. Vamos dizer que uma rã tem energia i se ela estiver no *i-ésimo* degrau. Por exemplo, uma rã que está no terceiro degrau tem energia 3, se ela pular para o sétimo degrau passará a ter energia 7. Note que a soma das energias de todas as rãs é invariante, i.e, é sempre $1+2+\cdots 10 = 55$. Desse modo se em algum momento todas estiverem no mesmo degrau x, todas também terão energia x, ou seja $10x = 55$. E como $x \in \mathbb{N}$, concluímos que é impossível todas ficarem no mesmo degrau. □

Problemas da seção 6.1

1. Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e virá-las ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa?

2. Os números $1, 2, 3, ..., 1989$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois números e escrever sua diferença no local. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Esse número pode ser o zero?

3. Os números $1, 2, ..., 20$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois deles a e b e escrever no lugar o número $a+b+ab$. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Qual deve ser esse número?

4. Começando com a tripla $\{3, 4, 12\}$ podemos a cada passo escolher dois número a e b e trocá-los por $0.6a - 0.8b$ e $0.8a + 0.6b$. Usando essa operação podemos obter $\{4, 6, 12\}$

5. Em um tabuleiro 8×8 uma das casas está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

6. Em um tabuleiro 3×3 uma das casas do canto está pintada de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

7. Em um tabuleiro 8×8 as quatro casas do canto estão pintadas de preto e as outras casas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

8. Dado um polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$ pode mos fazer as seguintes operações:
   a. Trocar a com c.
   b. Tocar x por $x + t$ onde t é um real.
   Usando essas operações é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$?

9. *(Bulgária 2004)* Considere todas as "palavras" formadas por a's e b's. Nestas palavras podemos fazer as seguintes operações: Trocar um bloco aba por um bloco b, trocar um bloco bba por um bloco a. Podemos fazer também as operações ao contrário. É possível obter a seqüência $b\underbrace{aa...a}_{2003}$ a partir de $\underbrace{aa...a}_{2003}b$?

10. *(Fortaleza 2003)* Sobre uma circunferência tomamos $m+n$ pontos, que a divide em $m+n$ pequenos arcos. Nós pintamos m pontos de branco e os n restantes de preto. Em seguida, associamos a cada um dos $m+n$ arcos um dos números $2, 1/2$ ou 1, dependendo se as extremidades do arco sejam, respectivamente, ambas brancas, ambas pretas ou uma preta e uma branca.
Calcule o produto dos números associados a cada um dos $m+n$ arcos.

6.2 Falsas invariantes

Você já deve ter percebido que a maioria dos problemas de invariância têm o enunciado muito parecido. Todos eles de alguma forma perguntam se, dado uma configuração é possível chegar em outra. E como você também deve ter visto, a maioria das respostas é sempre *não*. Cuidado! Existem problemas com o enunciado muito parecido mas, a resposta é afirmativa. Nestes casos, devemos mostrar como chegar na tão desejada configuração.

O próximo problema é da olimpíada do Leningrado (região da Rússia que é atualmente conhecida como São Petersburgo) de 1990. Esse exemplo irá esclarecer a idéia de "falsa invariante".

Ex: *O número 123 está na tela do computador de Teddy. A cada minuto o número escrito na tela é somado com 102. Teddy pode trocar a ordem dos dígitos do número escrito na tela quando ele quiser. Ele pode fazer com que o número escrito na tela seja sempre um número de três dígitos?*

Solução. É possível, basta ele seguir a seqüência: $123 \to 225 \to 327 \to 429 \to 531 \Rightarrow 135 \to 237 \Rightarrow 327 \to 429 \cdots$, onde $\to$ denota a operação de computador e $\Rightarrow$ uma operação feita por Teddy. □

Problemas da seção 6.2

11. É possível por os números de 1 a 16 (inclusive) em uma reta na ordem crescente. Podemos escolher dois números e trocá-los de lugar. Podemos obter uma configuração em que a soma de quaisquer dois vizinhos seja um quadrado perfeito?

12. Temos sete moedas ao formando um círculo. Inicialmente, todas estão mostrando a face da coroa. Podemos escolher quaisquer cinco vizinhas e virá-las. É possível fazer com que todas mostrem a face da cara?

13. *(Leningrado 1990)* Vinte números estão escritos em um círculo. Podemos escolher uma tripla de números consecutivos x, y, z e trocá-la pela tripla $x+y, -y, z+y$ (na mesma ordem). Usando essa transformação é possível obter a seqüência $[10, 9, 8, ..., 2, 1, -10, -9, ..., -2, -1]$ a partir da seqüência $[1, 2, ..., 9, 10, -1, -2, ..., -9, -10]$? (os números são dados no sentido horário.)

6.3 Restos como invariantes

Como todo mundo sabe, um bom problema de olimpíada é aquele que mistura a maior quantidade de assuntos diferentes. Nesta seção vamos abordar uma nova utilidade para a teoria dos números (e advinha aonde)!

(Leningrado 1987). *As moedas dos países Dillia e Dallia são o diller e o daller, respectivamente. Podemos trocas um diller por dez dallers e um daller por dez dillers. Zequinha possui um diller e deseja obter a mesma quantidade de dillers e dallers usando essas operações. É possível que isso ocorra?*

Solução. Seja S a diferença entre a quantidade de dillers e dallers. Note que a congruência de S módulo 11 é invariante. Como inicialmente $S \equiv 1 \pmod{11}$, não se pode obter a mesma quantia de dillers e dallers. □

Problemas da seção 6.3

14. Seja $d(x)$ a soma dos dígitos de $x \in \mathbb{N}$. Determine todas as soluções de $d(d(n))+d(n)+n = 1997$
15. *(Torneio das Cidades)* Todo membro de uma seqüência, iniciando do segundo, é igual a soma do termo anterior com a soma de seus dígitos. O primeiro número é 1. É possível que 123456 pertença à seqüência?
16. *(Hong Kong 1997)* Cinco números $1, 2, 3, 4, 5$ estão escritos em um quadro negro. Um estudante pode apagar dois dos números a e b e escrever nos seus lugares $a + b$ e ab. Após algumas operações podemos obter a quíntupla $21, 27, 64, 180, 540$?
17. *(TT 1985)* Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?
18. Em uma fábrica de cartões existem três máquinas. A primeira recebe um cartão (a, b) e retorna um cartão $(a + 1, b + 1)$. A segunda recebe um cartão $(2a, 2b)$ e retorna um cartão (a, b). A terceira recebe dois cartões (a, b) e (b, c) e retorna o cartão (a, c). Todas as máquinas também retornam o(s) cartão(ões) dados. É possível fabricar um cartão $(1, 1988)$ se temos inicialmente apenas um cartão $(5, 19)$?
19. Com a calculadora KPK-1991 podemos efetuar duas operações: (a) elevar um número ao quadrado; e (b) e obter de um número X de n dígitos $(n > 3)$ o número $A + B$, onde A é o número formado pelos três últimos de X e B o número formado pelos $(n - 3)$ dígitos de X. Podemos obter o número 703 a partir de 604 usando essa calculadora?
    Tente usar módulo 37.

6.4 Semi-invariantes

A idéia de *semi-invariante* é um pequena generalização da idéia de invariante. Diremos que uma propriedade é semi-invariante quando ela muda de forma previsível (periodicamente ou sempre crescendo ou decrescendo). Um exemplo bastante comum de semi-invariante é a idade de uma pessoa, que sempre cresce de forma periódica (a cada 365).

Ex: *Um total de 2000 pessoas estão divididas entre os 115 quartos de uma mansão. A cada minuto, uma pessoa anda para um quarto com número igual ou maior de pessoas do qual ela estava. Prove que eventualmente todas as pessoas vão estar em um mesmo quarto.*

Solução. Sejam $a_1, a_2, ..., a_{115}$ a quantidade de pessoas nos quartos $1, 2, ..., 115$ respectivamente em um dado momento. Defina $I = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{115}^2$.
Digamos que uma pessoa sai de um quarto com n pessoas e vai para um quarto com m pessoas $(m \geq n)$. A variação de I é dada por:

$$\Delta I = ((m+1)^2 + (n-1)^2) - (m^2 + n^2) = 2(m - n + 1) > 0$$

Assim, toda vez que uma pessoa muda de quarto o valor de I cresce. Porém, sabemos que o valor de I não pode crescer indefinidamente pois, o número de pessoas é finito. Ou seja, em um dado momento I não poderá mais crescer, isso só acontecerá quando nenhuma pessoa puder mudar de quarto. Logo, todas elas deverão estar no mesmo quarto. $\square$

Problemas da seção 6.4

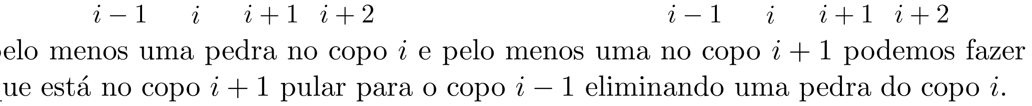
20. *(Leningrado)* Existem $n \geq 2$ números não-nulos escritos em um quadro. Podemos escolher dois números a e b e trocá-los por $a + b/2$ e $b - a/2$. Prove que após feito um movimento não podemos obter os números iniciais novamente.

21. *(Ucrânia 2000)* Existem inicialmente n números 1 escritos em um quadro. Em cada passo podemos apagar a e b e escrever o número $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$ no seu lugar. Após repetir essa operação $n-1$ vezes, prove que o último número escrito não pode ser menor que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

22. *(São Petersburgo 1998)* Um total de 119 anões vivem em uma aldeia com 120 pequenas casas. Uma casa é dita super-habitada se 15 anões ou mais vivem nela. Todo dia, os anões de uma casa super-habitada têm uma briga e se mudam para outras casas da aldeia. Algum dia, necessariamente se encerrará?

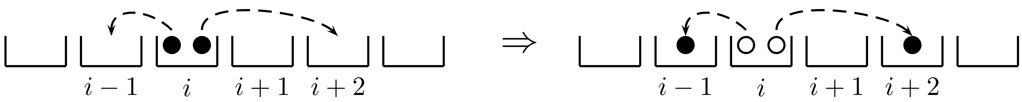
23. *(Russia 1997)* Temos uma fileira longa de copos e n pedras no copo central (copo 0). Os seguintes movimentos são permitidos:

    Movimento tipo A:

    Se há pelo menos uma pedra no copo i e pelo menos uma no copo $i+1$ podemos fazer uma pedra que está no copo $i+1$ pular para o copo $i-1$ eliminando uma pedra do copo i.

Movimento tipo B:



Se há pelo menos duas pedras no copo i podemos pular uma pedra para o copo $i+2$ e outra para o copo $i-1$.

Demonstre o seguinte fato: fazendo os movimentos tipo A ou B durante um tempo suficientemente longo sempre chegamos a uma configuração a partir da qual não é possível fazer nenhum desses dois tipos de movimento. Além disso, essa configuração final não depende da escolha de movimentos durante o processo.
Dica: Lembre-se de usar energia!

Capítulo 7

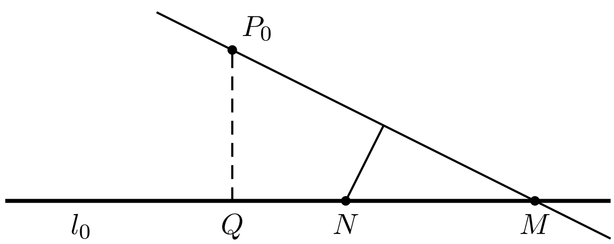
Princípio do Extremo

A idéia chave na solução de muitos problemas de combinatória, ou até mesmo em teoria dos números e álgebra é a simples consideração de um elemento extremo (máximo ou mínimo). O próximo problema mostrará como essa idéia pode ser simples e ao mesmo tempo poderosa.

(Leningrado 1988). *Alguns pinos estão em um tabuleiro de xadrez. A cada segundo, um dos pinos move para uma casa vizinha (lado em comum). Após muito tempo verificou-se que cada pino havia passado todos todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e tinha voltado para a sua casa inicial. Prove que existiu um momento em que todos os pinos estavam fora de sua casa inicial.*

Solução. Seja P o primeiro pino que voltou para a sua posição inicial. Um movimento antes dele voltar para sua casa, cada um dos outros pinos deve ter feito um movimento. De fato, se isso não fosse verdade, P não poderia ter passado por todas as casas do tabuleiro. Desse modo, este será o momento em que todos os pinos estarão em casas diferentes das iniciais. $\square$

Ex: *Um conjunto finito S de pontos no plano possui a propriedade que qualquer reta que passa por dois destes pontos também passa por um terceiro. Prove que todos os pontos estão sobre uma reta.*



Solução. Seja L o conjunto de todas as retas que passam por pelo menos dois pontos de S. Agora sejam $P_0 \in S$ e $l_0 \in L$ tais que a distância entre P_0 e l_0 é a menor possível porém, diferente de zero. Seja Q a projeção de P_0 sobre l_0. Como a reta l_0 passa por três deles, pelo menos dois deles N e M estão na mesma semi-reta (em relação a Q). Suponha que N é o mais próximo de Q desse modo, a distância entre N e a reta P_0M é menor que a mínima. Contradição. $\square$

Problemas:

1. Dado um conjunto de n pontos no plano, nem todos numa mesma reta, existe uma reta que passa por exatamente dois desses pontos.

2. São dados $n \geq 3$ pontos no plano de forma que quaisquer três estão em um triângulo de área menor que 1. Mostre que todos eles estão em um triângulo de área menor que 4.

3. São dados n pontos no plano. Marcamos então, os pontos médios de todos os segmentos com extremidades nesses n pontos. Prove que há pelo menos $2n - 3$ pontos marcados distintos.

4. Há 20 paises em um planeta. Sabe-se que dentre quaisquer três desses países, existe sempre dois sem relações diplomáticas. Prove que existem, no máximo, 200 embaixadas neste platena.

5. Todo participante de um torneio joga com cada um dos outros participantes exatamente uma vez. Após o torneio cada jogador faz uma lista com os nomes de todos os jogadores vencidos por ele e de todos os que foram vencidos pelos jogadores que ele venceu. Sabendo que neste torneio não há empates, prove que existe um jogador cuja a lista possui o nome de todos os outros jogadores.

6. Em um pátio estão localizadas $2n + 1$ pessoas tais que as distância entre quaisquer duas delas são todas distintas. Em um dado momento cada uma delas atira na pessoa mais próxima de si. Prove que:

   (a) Pelo menos uma pessoa irá sobreviver.

   (b) Ninguém levará mais de cinco tiros.

   (c) Os caminhos das balas não se encotram.

   (d) Os segmentos formados pelas tragetórias das balas não formam um polígono convexo fechado.

7. Considere três escolas, cada uma com n alunos. Cada estudante tem ao todo $n+1$ amigos nas outras duas escolas em que ele não estuda. Prove que é possível selecionar um estudante de cada escola de tal forma que os três se conheçam mutuamente.

8. O parlamento da Bruzundanga consiste de uma casa. Todo membro tem no máximo três inimigos dentre os restantes. Mostre que é possível separar a casa em duas casas de tal forma que cada membro tenha no máximo um inimigo em sua casa.

9. *(Leningrado 1989)* Dado um número natural k maior que 1, prove que é impossível colocar os números $1, 2, ..., k^2$ em um tabuleiro $k \times k$ de forma que todas as somas dos números escritos em cada linha e coluna sejam potências de 2.

Referências

[1] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, 1998

[2] Carlos Yuzo Shine, *Grafos e Contagem Dupla*, Eureka! N°12, 2001

[3] Cecil Rousseau, Edward Lozansky, *Winning Solutions*, 1996

[4] Dmitri Fomin, Alexey Kirichenkko, *Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991*, 1994

[5] Dmitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, *Mathematical Circles (russian experience)*, 1996

[6] Loren C. Larson, *Problem-Solving Through Problems*, 1983