

## PCP – Princípio das Casas dos Pombos – Lista de Exercícios

**Tema:**

- Princípio das Casas dos Pombos (Princípio de Dirichlet);

**Objetivos:**

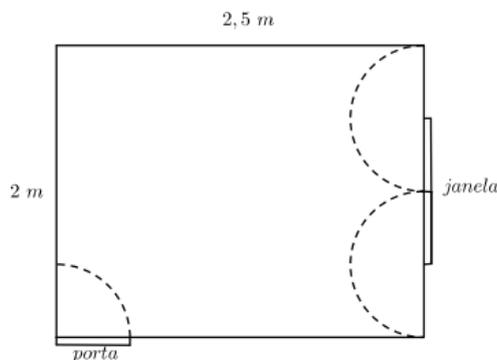
- Conhecer o Princípio de Dirichlet;
- Relacionar com situações que podem ser encontradas no dia-a-dia;
- Aplicar em problemas olímpicos.

1. Um saco contém bolas de duas cores: branca e preta. Qual é o menor número de bolas que precisam ser retiradas do saco, sem olhar, de modo que possamos garantir que duas das bolas retiradas sejam da mesma cor?
2. Uma floresta tem um milhão de pinheiros. Sabe-se que nenhum pinheiro tem mais de 600.000 pinhas. Mostre que pelo menos dois dos pinheiros na floresta têm que ter o mesmo número de pinhas.
3. Dados doze inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11.
4. Vinte e cinco engradados de maçãs foram entregues em uma loja. As maçãs são de 3 tipos diferentes, mas todas as maçãs em cada engradado são do mesmo tipo. Mostre que pelo menos 9 dos engradados contêm o mesmo tipo de maçãs.
5. Um país tem  $M$  times de futebol, cada um deles com 11 jogadores. Todos os jogadores estão reunidos em um aeroporto, em “lista de espera” para viajar para outro país para um jogo importante. Existem 10 voos para onde eles querem ir e cada voo tem lugar para exatamente  $M$  jogadores. Um jogador prefere ir com seu próprio helicóptero ao jogo, em vez de ficar esperando lugar em um avião. Mostre que é garantido que pelo menos um time inteiro vai conseguir lugar para ir a este torneio.
6. Dados 8 números naturais diferentes, nenhum deles maior do que 15, mostre que pelo menos 3 deles têm a mesma diferença positiva.
7. Mostre que, em qualquer grupo de 5 pessoas, duas delas têm o mesmo número de amigos no grupo.
8. Diversos times de futebol jogam em um torneio onde cada time tem que jogar com todos os outros exatamente uma vez. Mostre que, em qualquer instante do torneio, dois times terão jogado, até este instante, o mesmo número de jogos.
9. Qual é o maior número de quadrados em um tabuleiro  $8 \times 8$  que pode ser colorido de verde de modo que, em qualquer arranjo de três quadrados como na figura (um triminó), pelo menos um quadrado não está colorido de verde? ( O triminó pode aparecer como na figura, ou pode estar girado por algum múltiplo de 90 graus.)
10. Dez estudantes resolveram um total de 35 problemas em uma olimpíada de matemática. Cada problema foi resolvido por exatamente um estudante. Pelo menos um dos estudantes resolveu exatamente um problema, pelo menos um dos estudantes resolveu exatamente 2 problemas e pelo menos um dos estudantes resolveu exatamente 3 problemas. Prove que pelo menos um dos estudantes resolveu pelo menos 5 problemas.

11. Cinco jovens trabalhadores receberam como salário, 1500 reais ao todo. Cada um deles quer comprar um reprodutor de CDs que custa 320 reais. Prove que pelo menos um deles vai ter que esperar pelo próximo pagamento para fazer sua compra.
12. Em um conjunto de 7 pessoas, a soma de suas idades é de 332 anos. Prove que podemos escolher 3 pessoas tais que a soma de suas idades não seja menor do que 142 anos.
13. Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos dois destes pontos estão em uma distância menor que ou igual a  $\sqrt{2}$ .
14. Prove que dados sete inteiros positivos, existem dois cuja soma ou a diferença é um múltiplo de 10.
15. Dados 5 pontos no plano com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos 10 pontos médio gerados por eles também possui coordenadas inteiras.
16. Cinquenta e um pontos são postos no interior de um quadrado de lado 1 metro. Prove que existe um conjunto de três desses pontos podem ser cobertos por um quadrado de lado 20 centímetros.
17. Prove que de qualquer subconjunto de  $n + 1$  elementos do conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  é possível escolher dois que sejam primos entre si.

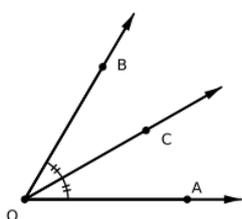
#### QUESTÕES DO BANCO DE QUESTÕES 2015

1. Pedro acabou de se mudar para sua nova casa e ganhou um novo quarto. A figura a seguir mostra uma vista superior simplificada de seu novo quarto que possui 2m de largura por 2,5m de comprimento.



A porta indicada na figura tem 50 cm de comprimento e pode ser aberta até encontrar a parede lateral. A janela é dividida em duas portas de mesmo comprimento que quando abertas encostam nas paredes vizinhas. Os arcos da figura mostram as aberturas da porta e da janela. A mãe de Pedro disse que ele deve colocar seus móveis no quarto de modo que não fiquem nos caminhos de abertura da porta nem da janela. Quantos metros quadrados Pedro tem em seu quarto para colocar os seus móveis?

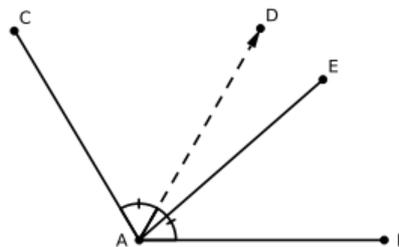
2. A bissetriz de um ângulo é uma semi-reta com origem no vértice de um ângulo que o divide em dois outros ângulos congruentes. Por exemplo, no desenho abaixo, a semi-reta  $OC$  é bissetriz do ângulo  $\angle AOB$ .



- a) A diferença entre dois ângulos consecutivos mas não adjacentes é  $100^\circ$ . Determine o ângulo formado por suas bissetrizes.

**OBSERVAÇÃO:** Lembre-se que dois ângulos são consecutivos se possuírem o mesmo vértice e pelo menos um lado em comum e que dois ângulos são adjacentes se não possuírem pontos interiores em comum.

b) No desenho abaixo,  $DA$  é bissetriz do ângulo  $\angle CAB$ . Determine o valor do ângulo  $\angle DAE$  sabendo que  $\angle CAB + \angle EAB = 120^\circ$  e  $\angle CAB - \angle EAB = 80^\circ$ .



Autor: Matheus Carboni Machado