NÍVEL 1 M

SOLUÇÕES – SEMANA 12

a) Como nos interessa apenas o valor da casa das unidades, podemos fazer as primeiras multiplicações:

$$\begin{array}{rr} & 8 \\ \text{x} & 8 \\ \hline 6 & 4 \end{array} = 2^2$$

$$\begin{array}{rr} 6 & 4 \\ \text{X} & 8 \\ \hline \ldots & 2 \end{array} = 2^3$$

$$\begin{array}{rr} \ldots & 2 \\ \text{x} & 8 \\ \hline \ldots & 6 \end{array} = 2^4$$

$$\begin{array}{rr} \ldots & 6 \\ \text{x} & 8 \\ \hline \ldots & 8 \end{array} = 2^5$$

Assim, percebemos que sempre que o expoente for múltiplo de 5 , o algarismo das unidades será 8. Dividindo então o expoente 368 por 5 temos que o resto da divisão é 3, e portanto se enquadraria no expoente múltiplo de 4, ou seja, o algarismo das unidades é 6.

b) A mesma operação acima pode ser feita aqui, e veremos que o ciclo é menor, com apenas duas repetições. Se o expoente é par o algarismo das unidades é 6, se o expoente é ímpar o algarismo é 4. Como o expoente 2014 é par, o algarismo das unidades vai ser 6.

NÍVEL 2 M

SOLUÇÕES – SEMANA 12

a) Para reconhecermos se um número maior do que 2 é primo, devemos seguir os seguintes passos:

1º: Dividirmos o número dado n pela sucessão de números primos $(2, 3, 5, \ldots)$;

2º: Enquanto o resto for diferente de zero e o quociente maior que o divisor, nada se pode afirmar e prosseguimos a pesquisa;

3º: Quando o quociente se tornar menor ou igual ao divisor e o resto permanecer diferente de zero, então se pode afirmar que o número n é primo.

Verificando se 53 é primo:

$$\begin{array}{l|l} 53 & \underline{\quad 2 \quad} \\ & 26 > 2 \\ R \neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 53 & \underline{\quad 3 \quad} \\ & 17 > 3 \\ R \neq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 53 & \underline{\quad 5 \quad} \\ & 10 > 5 \\ R \neq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 53 & \underline{\quad 7 \quad} \\ & 7 = 7 \\ R \neq 0 & \end{array}$$

Conclusão: 53 é primo!

b) É possível determinar uma sequência de números primos, a partir de 2, menores do que o número dado. Para isso, devemos empregar o procedimento ensinado por Erathóstenes, cuja regra é a seguinte:

- Escrevem-se todos os números naturais, a partir de 2, até o número desejado;

- a partir de 2, exclusive, cancelam-se todos os múltiplos de 2;

- a partir de 3, exclusive, cancelam-se todos os múltiplos de 3;

- a partir de 5, exclusive, cancelam-se todos os múltiplos de 5;

- a partir de 7, exclusive, cancelam-se todos os múltiplos de 7;

Procede-se dessa forma até cancelarmos todos os múltiplos do 1º número cujo quadrado seja maior do que o último número dado.

Determinando se 97 é primo:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Conclusão: 97 é primo.

NÍVEL 3 M

SOLUÇÕES – SEMANA 12

Nossa estratégia consistirá em efetuar operações em cada termo da fração dentro da raiz.

No numerador:

$$\left(\frac{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\right)\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}\right)=\left(\frac{\frac{6+2-1}{6}}{\frac{6-2+1}{6}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{8+2-1}{8}}{\frac{8-2+1}{8}}\right)=\left(\frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{6}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{9}{8}}{\frac{7}{8}}\right)=\frac{7\cdot 9}{5\cdot 7}$$
$$=\frac{9}{5}$$

No denominador:

$$\left(\frac{1+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}\right)\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}\right)=\left(\frac{\frac{10+2-1}{10}}{\frac{10-2+1}{10}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{12+2-1}{12}}{\frac{12-2+1}{12}}\right)$$
$$=\left(\frac{\frac{11}{10}}{\frac{9}{10}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{13}{12}}{\frac{11}{12}}\right)=\frac{11\cdot 13}{9\cdot 11}=\frac{13}{9}$$

Logo, a expressão ficará:

$$E=\sqrt{\left(\frac{\frac{9}{5}}{\frac{13}{9}}\right)\cdot\frac{65}{81}+3}\quad\rightarrow\quad E=\sqrt{\frac{9\cdot 9}{5\cdot 13}\cdot\frac{65}{81}+3}\quad\rightarrow\quad E=\sqrt{1+3}$$

$$E=\sqrt{4}\quad\rightarrow\quad E=2$$

NÍVEL 4 M

SOLUÇÕES – SEMANA 12

$$f(x+2) = 2 \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{f(x+2)}{2} \quad \Rightarrow \quad f(0) = \frac{f(0+2)}{2}$$
$$= \frac{f(2)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(2)}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad f(2) = 6$$

Por outro lado temos:

$$f(x) = \frac{f(x+2)}{2} \quad \Rightarrow \quad f(2) = \frac{f(2+2)}{2} \quad \Rightarrow \quad f(4) = f(2) \cdot 2$$
$$\Rightarrow \quad f(4) = 2 \cdot 6 = 12$$

Assim, temos:

$$f(2) + f(4) = 6 + 12 \quad \Rightarrow \quad f(2) + f(4) = 18$$

NÍVEL 5 M

SOLUÇÕES – SEMANA 12

$$r = 0{,}08 \cdot a_1$$

$$a_{11} = 36$$

$$a_{11} = a_1 + 10 \cdot r$$

$$36 = a_1 + 10 \cdot (0{,}08 \cdot a_1)$$

$$a_1 = \frac{36}{1{,}8} \quad \rightarrow \quad a_1 = 20$$

$$r = 0{,}08 \cdot a_1 \quad \rightarrow \quad r = 0{,}08 \cdot 20 \quad \rightarrow \quad r = 1{,}6$$

$$a_{26} = a_1 + 25 \cdot r$$

$$a_{26} = 20 + 25 \cdot 1{,}6$$

$$a_{26} = 20 + 40 \quad \rightarrow \quad a_{26} = 60$$

$$S_{26} = \frac{26 \cdot (20 + 60)}{2} \quad \rightarrow \quad S_{26} = 13 \cdot 80 \quad \rightarrow \quad S_{26} = 1.040$$

NÍVEL 6 M

SOLUÇÕES – SEMANA 12

Sejam a e b as quantidades vendidas dos produtos respectivamente.

O custo unitário de cada produto foi:

PRODUTO a: $4{,}00 \cdot 1{,}5 = 6{,}00$

PRODUTO b: $10{,}00 \cdot 1{,}4 = 14{,}00$

Assim teremos:

$$\begin{cases} a + b = 520 \\ 6{,}00a + 14{,}00b = 5.360 \end{cases}$$

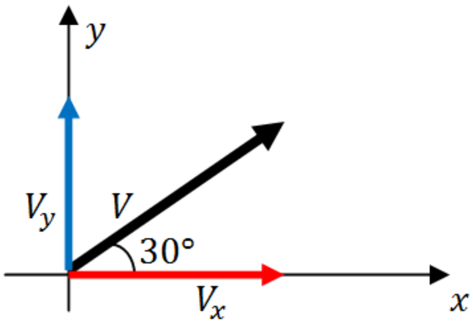
Resolvendo o sistema teremos que $a = 240$ e $b = 280$.

Assim, Seu João vendeu 240 unidades do produto a e 280 unidades do produto b.

NÍVEL 4 F

SOLUÇÕES – SEMANA 12

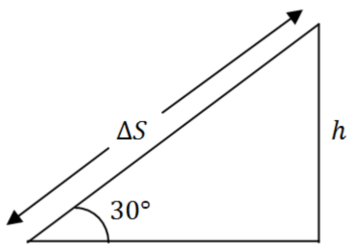
a) Representando a velocidade da escada:



A componente vertical V_y é igual a:

$$V_y = V \cdot sen\ 30° \quad \rightarrow \quad V_y = 0{,}8 \cdot \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad V_y = 0{,}4 m/s$$

b) Do enunciado:



Em que:

ΔS: deslocamento escalar do passageiro entre os níveis da plataforma e da rua.

h: profundidade que se encontra o nível da plataforma em relação ao nível da rua.

Deslocamento escalar:

$$\Delta S = V \cdot t \quad \rightarrow \quad \Delta S = 0{,}8 \cdot 30 \quad \rightarrow \quad \Delta S = 24m$$

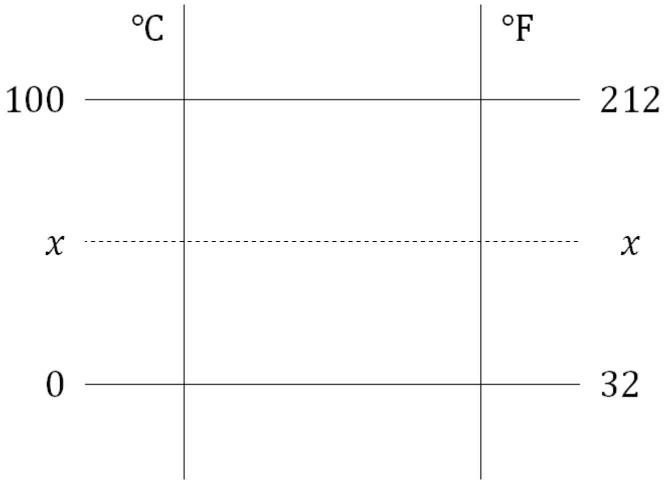
Portanto:

$$sen\ 30° = \frac{h}{\Delta S} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{h}{24} \quad \rightarrow \quad h = 12m$$

NÍVEL 5 F

SOLUÇÕES – SEMANA 12

Sim, é possível:



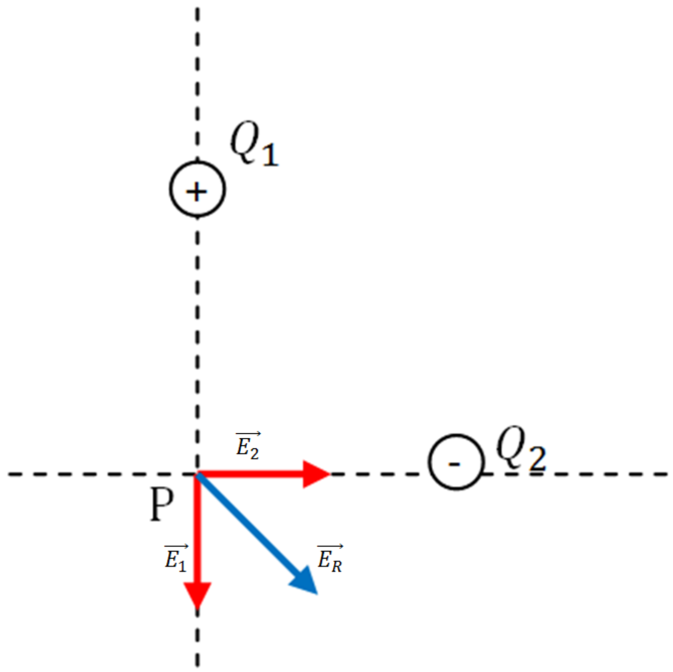
$$\frac{x-0}{100-0}=\frac{x-32}{212-32} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{100}=\frac{x-32}{180} \quad \rightarrow \quad 180x$$
$$= 100x-3.200 \quad \rightarrow \quad 80x=-3.200$$

$$x=-\frac{3.200}{80} \quad \rightarrow \quad x=-40$$

Portanto, a temperatura de $-40°C = -40°F$.

NÍVEL 6 F

SOLUÇÕES – SEMANA 12



Calculando E_1:

$$E_1 = \frac{k \cdot Q_1}{d^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 5 \cdot 10^3 N/C$$

Calculando E_2:

$$E_2 = \frac{k \cdot Q_2}{d^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 12 \cdot 10^3 N/C$$

Assim:

$$|\,E_R\,| = \sqrt{{E_1}^2 + {E_2}^2} \quad \rightarrow \quad E_R = \sqrt{(5 \cdot 10^3)^2 + (12 \cdot 10^3)^2} \quad \rightarrow \quad E_R = \sqrt{169 \cdot 10^6}$$

$$E_R = 13 \cdot 10^3 N/C \quad \text{ou} \quad 1{,}3 \cdot 10^4 N/C$$