

Produtos notáveis e fatorações não tão notáveis

Cícero Thiago B. Magalhães

ciceroth@yahoo.com.br

O objetivo desta aula é algebrizar o conceito de decomposição em fatores primos e aprender algumas fatorações bem legais!

1. Produtos Notáveis

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2. Algumas fatorações triviais

- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

3. Fatorações não tão notáveis

Usando os produtos notáveis acima, vamos aprender a fatorar!!

- Fatore $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Solução:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= \\ a^3 + b^3 + 3ab(a + b) - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc &= \\ (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc &= \\ [(a + b) + c] [(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c) &= \\ (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) &= \\ (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) & \end{aligned}$$

- Fatore $a^4 + 4b^4$.

Exercícios Propostos

- Calcule o valor de

$$N = \frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}.$$

2. Mostre que todo inteiro pode ser escrito como soma de 5 cubos.

3. (a) Efetue o produto

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)(x^{16} + 1)(x^{32} + 1)(x^{64} + 1)$$

(b) Racionalize a expressão

$$\frac{1}{(\sqrt[64]{2} + 1)(\sqrt[32]{2} + 1)(\sqrt[16]{2} + 1)(\sqrt[8]{2} + 1)(\sqrt[4]{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)}$$

4. O número a é a média aritmética de três números, e b é a média aritmética de seus quadrados. Expresse a média aritmética de seus produtos dois a dois em termos de a e b .

5. Determine qual é o maior dos dois números

$$\frac{123456 + 10^{999}}{123457 + 10^{999}} \text{ e } \frac{123457 + 10^{999}}{123458 + 10^{999}}.$$

6. Mostrar que se $a + b + c = 0$ então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

7. Encontre o quociente da divisão de $a^{128} - b^{128}$ por

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})(a^{32} + b^{32})(a^{64} + b^{64}).$$

8. Calcule $\sqrt{(1000000) \cdot (1000001) \cdot (1000002) \cdot (1000003) + 1}$.

9. Se $x^2 + x + 1 = 0$, calcule o valor numérico de

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \dots + \left(x^{27} + \frac{1}{x^{27}}\right)^2.$$

10. Calcule $123456789^2 - 123456790 \times 123456788$.

11. Sejam a, b, c, d números reais tais que: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0$. Prove que a soma de 2 destes números é 0.