

## QUESTÕES OBMEP- GEOMETRIA 2ªFASE – NÍVEL 2

Tema:

- Questões da OBMEP envolvendo geometria;

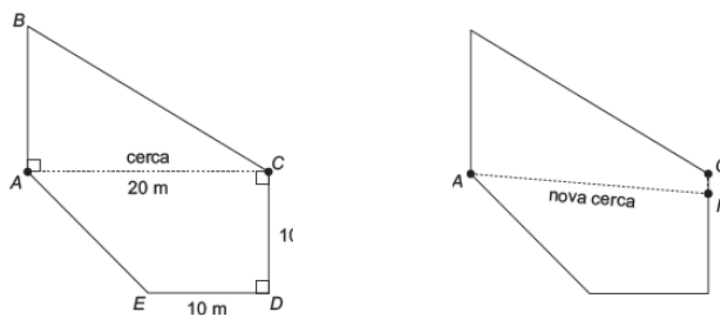
Objetivos:

- Entender os conceitos fundamentais da geometria plana;
- Aplicar na resolução dos problemas propostos;
- Exercitar e criar criatividade nos estudantes com problemas da OBMEP – 2ª fase

1. (OBMEP-2008) A figura da esquerda representa o terreno de Dona Idalina. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a  $120 \text{ m}^2$ .

a) Qual é a área total do terreno?

b) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura da direita, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?

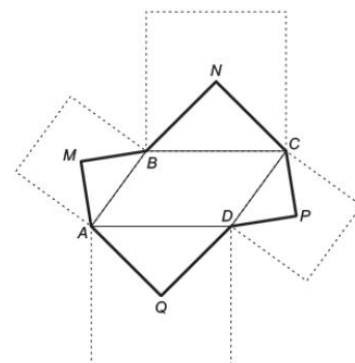


2. (OBMEP – 2008) Na figura, ABCD é um paralelogramo de área  $20 \text{ cm}^2$  e lados medindo  $4 \text{ cm}$  e  $6 \text{ cm}$ . Os pontos M, N, P e Q são os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo.

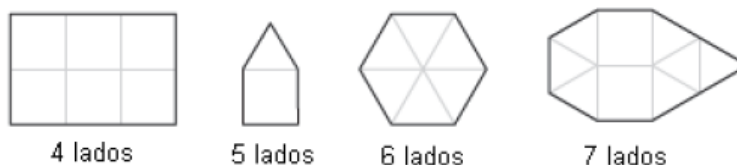
a) Calcule a área do polígono AMBNCPDQ.

b) Mostre que os ângulos  $\angle MAQ$  e  $\angle MBN$  têm a mesma medida.

c) Mostre que MNPQ é um quadrado e calcule sua área.



3. (OBMEP-2009) Um polígono convexo é elegante quando ele pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. A seguir, mostramos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.



a) Desenhe um polígono elegante de 8 lados, indicando uma decomposição.

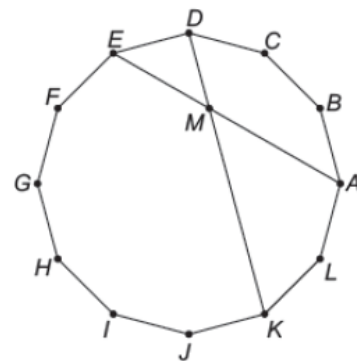
b) Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?

c) Mostre que um polígono elegante não pode ter mais que 12 lados.

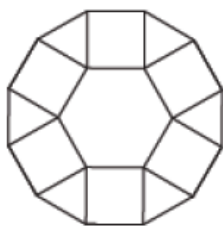
d) Desenhe um polígono elegante de 12 lados, indicando uma decomposição.

4. (OBMEP-2009) O polígono ABCDEFGHIJKL é regular e tem doze lados.

- Qual é a medida dos ângulos internos do polígono?
- O ponto M é a interseção dos segmentos AE e DK. Quais são as medidas dos ângulos  $\angle MDE$  e  $\angle DME$ ?
- Qual é a medida do ângulo  $\angle CBM$ ?
- Prove que os pontos B, M e F estão alinhados.



5. (OBMEP-2010) A figura mostra um dodecágono regular decomposto em seis triângulos equiláteros, seis quadrados e um hexágono regular, todos com lados de mesma medida.



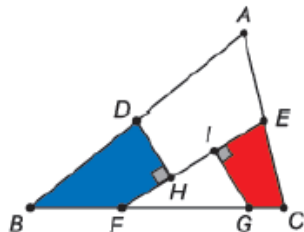
- Se cada triângulo da figura tem área igual a  $1 \text{ cm}^2$ , qual é a área do hexágono?
- A figura a seguir foi obtida retirando doze triângulos equiláteros de um dodecágono regular cujo lado mede  $1 \text{ cm}$ . Qual é a área dessa figura?



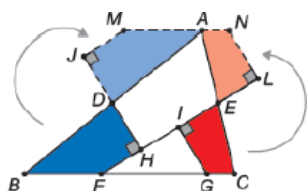
- A figura a seguir foi obtida retirando dois hexágonos regulares de um dodecágono regular cujo lado mede  $1 \text{ cm}$ . Qual é a área dessa figura?



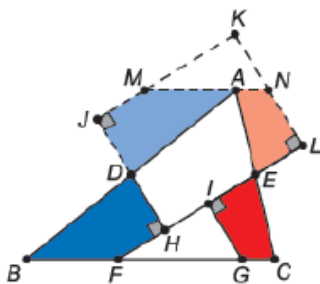
6. (OBMEP-2011) Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de AB, E é ponto médio de AC e FG mede  $\frac{1}{2} BC$ .



- Os quadriláteros DJMA e ELNA são obtidos girando de  $180^\circ$  os quadriláteros DHFB e EIGC em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo  $\angle MAN$  é igual a  $180^\circ$ .

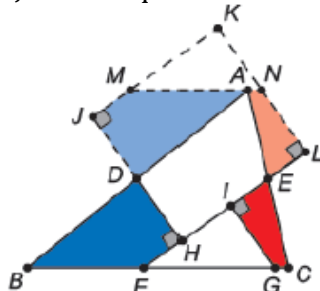


b) Na figura, o ponto K é a interseção das retas JM e LN. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



c) Os itens acima mostram que HJKL é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido. Agora mostre que  $LH = EF$ .

d) Na figura o triângulo ABC tem área 9 e HJKL é um quadrado. Calcule o comprimento de EF.

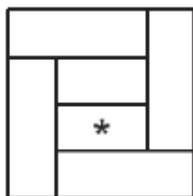


7. (OBMEP-2011) Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

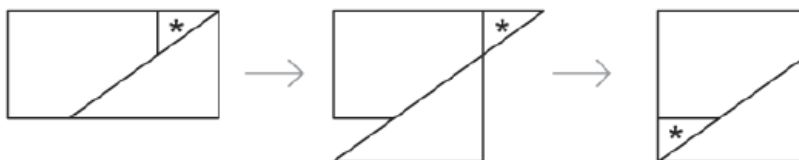
a) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de  $36 \text{ cm}^2$  de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.



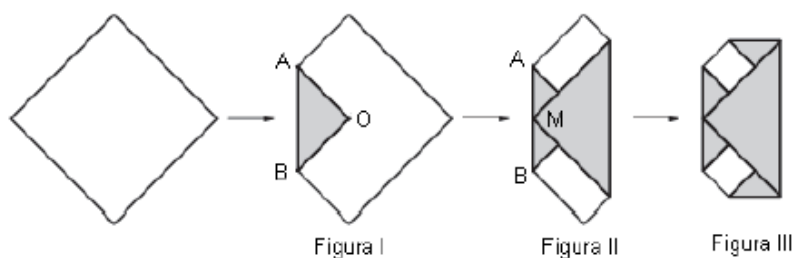
b) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de  $36 \text{ cm}^2$  de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com \*.



c) As medidas da terceira tira eram 4; 5 cm e 2 cm. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com \*?

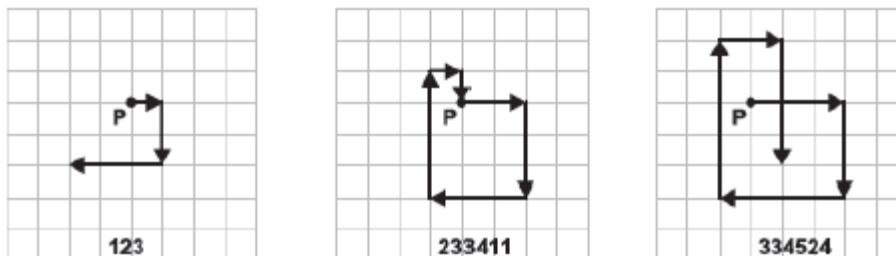


8. (OBMEP-2012) Uma folha de papel quadrada de área  $16 \text{ cm}^2$ , branca de um lado e cinza de outro, foi dobrada como indicado a seguir. O ponto O é o centro do quadrado e M é o ponto médio do segmento AB.



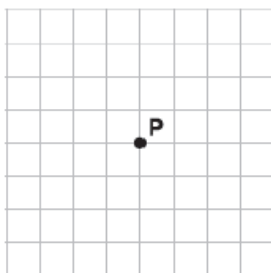
- a) Qual é a área da região branca na Figura I?  
 b) Qual é a área da região branca na Figura II?  
 c) Qual é a área da região branca na Figura III?

9. (OBMEP-2013) A assinatura geométrica de um número natural formado por algarismos diferentes de 0 é uma sequência de segmentos traçados sobre um quadriculado cujos quadradinhos têm 1 cm de lado. Os segmentos são traçados a partir de um ponto fixo P, para a direita, para baixo, para a esquerda, para cima, para a direita e assim por diante. O tamanho dos segmentos depende dos algarismos do número, como exemplificado a seguir.



Para obter a assinatura geométrica do número 334524, traça-se um segmento de 3 cm para a direita a partir de P, outro de 3 cm para baixo, outro de 4 cm para a esquerda, outro de 5 cm para cima, outro de 2 cm para a direita e outro de 4 cm para baixo. Na figura acima, vemos as assinaturas geométricas dos números 123, 233411 e 334524.

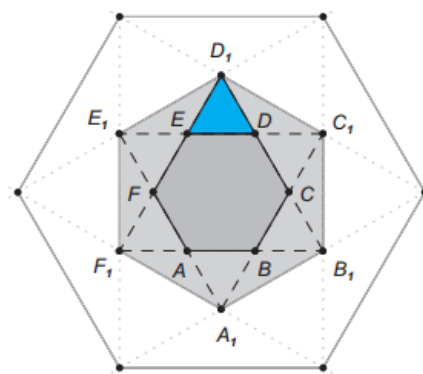
- a) Trace no quadriculado a assinatura geométrica do número 123456.



- b) Quantos são os números de quatro algarismos que têm assinatura geométrica fechada, isto é, começando e terminando em P?  
 c) Quantos são os números de cinco algarismos que têm assinatura geométrica fechada?

10. (OBMEP-2014) Os prolongamentos dos lados de um hexágono regular  $ABCDEF$ , de  $1\text{ cm}^2$  de área, determinam seis pontos de interseção, que são vértices de um novo hexágono regular  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ , conforme mostra a figura.

Repetindo esse processo de prolongamento de lados em cada novo hexágono obtido, determinamos novos hexágonos,  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ ,  $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ , e assim por diante.



- a) Qual é a área do triângulo  $EDD_1$  destacado em azul?  
 b) Qual é a área do hexágono  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ?  
 c) Qual é a área do hexágono  $A_5B_5C_5D_5E_5F_5$ ?