CENTRO EDUCACIONAL GIRASSOL

TD de Matemática

Prof.: Tiago Rodrigues - proftiagorodrigues@gmail.com

DIVISIBILIDADE E RESTO

1. Introdução

O assunto divisibilidade no Conjunto dos Inteiros ($\mathbb{Z}$) é extremamente importante para resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática (Teoria dos Números).

Quando falamos em “divisibilidade e resto”, pensamos logo que esse assunto é trivial, pois já foi visto na 5ª série. Mas não é bem assim, na realidade, esse tópico merece uma atenção mais profunda.

2. Divisibilidade

Definição

Sejam a e b dois inteiros, com a $\neq 0$, diz-se que a divide b, se, e somente se, existe um inteiro q tal que b = a . q. Neste caso diz-se também que a é divisor de b e que b é múltiplo de a.

Indicaremos por $a \mid b$ o fato de a dividir b; e se a não dividir b, escrevemos $a \nmid b$.
Vejamos alguns exemplos:

1. $4 \mid 12$, pois 12 = 4 . 3
2. $-5 \mid 30$, pois 30 = - 5 . (- 6)
3. $7 \mid -21$, pois – 21 = 7 . (- 3)
4. $3 \nmid 11$, pois não existe q inteiro tal que 10 = 3 . q

Para a relação $x \mid y$ nos inteiros valem as seguintes propriedades:

P_1 : $a \mid a$, $\forall a \in Z^*$, pois a = 1 . a (propriedade reflexiva)

P_2 : se $a \mid b$ e $b \mid a \Rightarrow |a| = |b|$. (propriedade anti–simétrica)

Demonstração:
De fato, por hipótese, $b = a.q_1$ e $a = b.q_2$. Daí, $b = b.(q_2.q_1)$. Se b = 0, como $a=b.q_2$, então a=0, e se $b \neq 0$, então $q_2.q_1 = 1$ e portanto $|q_1| = |q_2| = 1$. Logo $|a| = |b|$ também nesse caso.

P_3 : se $a \mid b$ e $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (propriedade transitiva)

Demonstração:
Por hipótese, $b = a.q_1$ e $c = b.q_2$. Daí, $c = a.(q_1.q_2)$ e portanto $a \mid c$.

P_4 **:** se $a \mid b$ e $c \neq 0$, então $a.c \mid b.c$.

Demonstração:
De fato, por hipótese b = aq e agora multiplique ambos os membros por c, vem:
b.c = (a.c).q. Portanto, $a.c \mid b.c$.

Obs.: a recíproca da propriedade 4 também é verdadeira, ou seja, se $a.c \mid b.c \Rightarrow a \mid b$. (Tente provar !)

P_5 **:** se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b \pm c)$.

Demonstração:
Pela hipótese, $b = aq_1$ e $c = aq_2$. Daí subtraindo ou somando uma equação de outra, vem:
$(b \pm c) = a\,(q_1 \pm q_2)$. Portanto, $a \mid (b \pm c)$.

Critérios de Divisibilidade

Um inteiro qualquer diferente de zero, é divisível por:

- **2**, se for par. **Ex: 2.004;**
- **3**, se a soma dos seus algarismos for um numeral divisível por 3**.** **Ex: 123;**
- **4**, se o numeral formado pelos dois algarismos da direita for um divisível por 4. **Ex: 7.008;**
- **5**, se terminar em 0 ou 5. **Ex: 19.875;**
- **6**, se for divisível simultaneamente por 2 e 3. **Ex: 1.056;**
- **7**, retira-se o último algarismo da direita, em seguida subtrai-se do número que restou o dobro do algarismo retirado. Essa diferença tem que ser divisível por 7. **Ex: 343;**
  Obs.: Não sendo notável a diferença, pode-se seguir várias vezes o mesmo processo.
- **8**, se o numeral formado pelos três últimos algarismos da direita for divisível por 8. **Ex: 123.016;**
- **9**, se a soma dos algarismos desse número for divisível por 9. **Ex: 9.234;**
- **10**, se terminar em 0. **Ex: 1.230;**
- **11**, se a soma dos algarismos de ordem ímpar menos a soma dos algarismos de ordem par for um número divisível por 11. **Ex: 72.897;**
- **12**, se for divisível simultaneamente por 3 e 4. **Ex: 11.580;**
- **13**, retira-se o último algarismo da direita, em seguida adiciona-se ao número que restou o quádruplo do algarismo retirado. Essa soma tem que ser divisível por 13. **Ex: 11.661;**
  Obs.: Não sendo notável a soma, pode-se seguir várias vezes o mesmo processo.
- **14**, se for divisível simultaneamente por 2 e 7. **Ex: 3.612;**
- **15**, se for divisível simultaneamente por 3 e 5. **Ex: 13.455;**
- **21**, se for divisível simultaneamente por 3 e 7. **Ex: 16.548;**
- **22**, se ao mesmo tempo for divisível por 2 e 11. **Ex: 19.536;**
- **25**, quando terminar 00, 25, 50 ou 75. **Ex: 121.345.725.**

ALGORITMO DA DIVISâO

Teorema

Se a e b são dois número inteiros, com $b > 0$, então existem e são únicos os inteiros q e r que satisfazem as condições:

$$a = b.q + r \quad e \quad 0 \leq r < b$$

Os elementos a, b, q e r são chamados, respectivamente, dividendo, divisor, quociente e resto da divisão de a por b.

Exemplo 1: Numa divisão o divisor é 4, ache os possíveis restos.

Solução: Como o divisor é 4, então 0 ≤ resto < 4. Daí, os possíveis restos são $\{0,1,2,3\}$.

Exemplo 2: Achar os números que, na divisão por 7, dão quociente igual ao resto.

Solução: Seja N um dos números procurados. Pelo algoritmo da divisão temos N = 7.q + r, com 0 ≤ r < 7. Fazendo r = q, temos N = 8.q , com 0 ≤ q < 7 e portanto os números são: 0, 8, 16, 24, 32, 40 e 48.

Restos das divisões

Na aplicação do caráter de divisibilidade, o resto da divisão de um número qualquer por outro, cujo caráter de divisibilidade conhecemos, será o mesmo resto encontrado na aplicação do caráter pelo divisor considerado.

Exemplo: Qual o resto da divisão de 1938 por 11?

Solução:
Soma dos algarismos de ordem ímpar = 9 + 8 = **17**
Soma dos algarismos de ordem par = 1 + 3 = **4**
17 – **4** = **13** e **13** dividido por 11 deixa resto **2**.

Teoria dos restos

Proposição 1. O resto da divisão de uma soma por um número é o mesmo que o da divisão da soma dos restos das parcelas por esse mesmo número.

Exemplo: Qual o resto da divisão da soma 18 + 27 + 14 por 4?

Solução:
Soma dos restos das parcelas: 2 + 3 + 2 = 7 e 7 deixa resto 3 na divisão por 4. Portanto, o resto da soma de 18 + 27 + 14 por 4 será 3.

Proposição2. O resto da divisão de um produto por um número é o mesmo que o da divisão do produto dos restos dos fatores por esse número.

Exemplo: Qual o resto da divisão do produto 4735 x 28624 x 74652 por 9?

Solução:
Produto dos restos dos fatores: 1 x 4 x 6 = 24 e 24 deixa resto 6 na divisão por 9. Logo, o resto do produto 4735 x 28624 x 74652 por 9 será 6.

NÚMEROS PRIMOS

Definição

Dizemos que um número inteiro positivo p maior que 1 é primo, se, e somente se, p possui exatamente dois divisores positivos distintos, ou seja, $\{1, p\}$. Exemplo: O número 2 é primo, pois os divisores positivos de 2 são $\{1, 2\}$. E mais, 2 é o único número primo par, pois se existe primo par maior que 2, seria da forma N = 2q (q $>$1). Portanto, 1, 2 e q são divisores de N, o que torna absurdo, pois N é primo.

Proposição 1. O conjunto dos números primos é infinito.

Proposição 2. Se p é primo e $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Teorema fundamental da aritmética

Todo inteiro positivo pode ser decomposto em fatores primos de uma única maneira.

Exemplo:

a) $2004 = 2^2 \times 3^1 \times 167^1$
b) $10.800 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$

Proposição 3. Se um número $n > 1$ não é divisível por nenhum dos primos p menores ou iguais a $\sqrt{n}$, então n é primo.

Exemplo: O número 271 é primo ou composto?

Solução: Primeiro, observemos que $16 \leq \sqrt{271} < 17$. Os primos que não superam 16 são: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Mas, nenhum deles divide 271. Logo, este número é primo.

Proposição 4. Seja N um inteiro positivo cuja forma fatorada é $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$, onde $p_1, p_2, \cdots, p_k$ são primos. A quantidade de divisores positivos de N é dada por $Q_D(N) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \cdots \times (\alpha_k + 1)$.

Exemplo: Quantos divisores positivos possui o número 48 ?

Solução: Como $48 = 2^4 \times 3$, então $Q_D(48) = (4+1) \times (1+1) = 10$.

Proposição 5. Seja N um inteiro positivo, cuja forma fatorada é $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$, onde $p_1, p_2, \cdots, p_k$ são primos. A soma dos divisores positivos de N é dada por $S_D(N) = \dfrac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \dfrac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \dfrac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$.

Exemplo: Ache a soma dos divisores positivos do número 90?

Solução: Fatorando temos $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, então

$$S_D(90) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \times \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 3 \times 13 \times 6 = 234.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS (MARAVILHAS!!!)

---

1. Determinar os números inteiros positivos que , divididos por 17, dão o resto igual ao quadrado do quociente.

2. Calcular o número de divisores positivos do produto $P = 9 \times 42 \times 24$.

3. Encontre o valor da soma dos divisores positivos comuns entre 240 e 360.

4. Mostrar que, se a soma de dois inteiros quaisquer é divisível por 2, então a sua diferença também é divisível por 2.

5. Mostrar que, se $n^2 + 1$ é divisível por n + 1, então n = 1.

6. Mostrar que a expressão 10^n x (an – 1) + 1 é divisível por 9, qualquer que seja o inteiro positivo n.

7. Sendo n um inteiro positivo, mostrar que $665|(9^{3n} - 8^{2n})$.

8. Mostrar que o inteiro $N = 2^{48} - 1$ é divisível por dois inteiros compreendidos entre 60 e 70.

9. Achar o resto da divisão de 6^{2002} por 10.

10. Um número dividido por 5 deixa resto 3 e dividido por 9 deixa resto 4. Determinar o resto da divisão deste número pelo produto 5 x 9.

11. Encontre o resto da divisão de 4^{555} por 10.

12. Determinar o resto da divisão por 3 da soma: 34 + 2487 + 36427 + 6123134, sem efetuá-la.

13. Determinar o resto da divisão por 8 do produto: 9428 x 7613 x 36249, sem efetuá-lo.

14. Determinar os restos das divisões por 5 e por 9, da expressão: 215378 x 27274 + 35826 x 1327.

15. Um número *a* dividido por 11 dá resto 2 e *b* é um número que, dividido pelo mesmo divisor, deixa resto 3. Calcular o menor número que se deve subtrair de $a^3 + b^2$ para se obter um múltiplo de 11.

16. Achar os valores do inteiro ***n*** para os quais a fração $\frac{n+2}{n-1}$ represente um inteiro.

17. Diga, justificando, se a igualdade $3^{10} + 7^{100} = 8^{100}$ é verdadeira.